WAHRSCHEINLICHKEIT, STATISTIK UND WAHRHEIT

von

RICHARD von MISES

НОВЕЙШИЕ ТЕЧЕНИЯ НАУЧНОЙ МЫСЛИ

27—28

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО • МОСКВА — ЛЕНИНГРАД

Р. МИЗЕС

ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА

ПЕРЕВОД С НЕМЕЦКОГО
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
ПРОФ. А. Я. ХИНЧИНА

30-61310
П-40044.
ПУБЛ. БИБЛ. имени В. И. ЛЕНИНА С. С. С. Р.

1930

Отпечатано в типографии Госиздата
„КРАСНЫЙ ПРОЛЕТАРИЙ".
Москва, Краснопролетарская, 16,
в количестве 2 000 экземпл.
Главлит № А—52717
Гиз Н—10 № 36301
Зак. № 10254
17 п. л.

☆

ОТ ГОСУДАРСТВЕННОГО ИЗДАТЕЛЬСТВА.

Статистический метод приобретает все большее значение в естествознании. Знакомство с основами теории вероятностей и с математической статистикой становится обязательным для естественника. Русская литература чрезвычайно бедна работами, которые давали бы в популярной форме знакомство с основными понятиями теории вероятностей и математической статистики. Большинство книг и учебников по теории вероятностей предъявляют к читателю значительные требования в области математики. Книга Мизеса дает прекрасное изложение основных идей теории вероятностей и математической статистики и, все время оставаясь на высоком научном уровне, в то же время не предъявляет к читателю почти никаких требований в области специально математических знаний.

Мизес не ограничивается, однако, простым изложением проблем теории вероятностей, но дает также наряду с обстоятельной критикой основ классической теории вероятностей попытку нового обоснования теории вероятностей.

Не входя в обсуждение теории Мизеса, следует отметить, что в отличие от большинства современных математиков Мизес защищает объективность понятия

вероятности в противовес классической школе, стоявшей целиком на субъективной точке зрения.

Защищая в области теории вероятностей объективную точку зрения, в теории познания Мизес стоит на точке зрения Маха. Махистская точка зрения проскальзывает у него также в трактовке отдельных проблем (например во введении, отчасти в проблеме закономерности динамической и статистической). Нельзя также согласиться с Мизесом в его оценке роли и значения философии в обосновании теории вероятностей. Здесь рассуждения его нужно признать чрезвычайно упрощенными; часто они производят впечатление обывательских суждений. Совершенно неверно поставлен вопрос о применимости статистики к общественным наукам.

Однако, несмотря на эти серьезные отступления от тех воззрений, которые мы могли бы проводить, книга Мизеса, несомненно, принесет пользу желающим ознакомиться с основами статистического метода и с его важнейшими применениями.

Мы не имеем в настоящее время сколько-нибудь законченной материалистической концепции теории вероятностей. Поэтому, несмотря на все свои дефекты и недочеты, книга Мизеса все же пробивает брешь в общепринятой субъективной концепции теории вероятностей. Поэтому из всех работ по основам теории вероятностей, появившимся в последнее время (Кейнс, Чубер), точка зрения Мизеса является наиболее приемлемой. Государственное издательство считает необходимым познакомить с ней наших читателей, которые, конечно, не будут смотреть на воззрения Мизеса, как на законченную и вполне приемлемую теорию учения о вероятностях.

ОТ РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА

Предлагая Государственному издательству книгу Мизеса для перевода на русский язык, мы исходили из твердого убеждения, что широким кругам советских читателей она даст исключительно много,—так много, как редко может дать популярная книга. Не говоря уже о том, что автор — блестящий популяризатор, обладающий редким даром самые отвлеченные схемы облекать в безупречно наглядную, доступную самому неподготовленному читателю форму, — для нас его сочинение (служащее сводкой многолетних исследований) особенно ценно тем духом непримиримого реформаторства, с которым Мизес обрушивается на господствующие до сих пор в нашей научной и особенно учебной литературе по теории вероятностей насквозь прогнившие схоластические традиции. Вскрытие длинного ряда упорно повторяемых, смехотворных с точки зрения современной науки нелепостей, которыми нас угощают современные руководства, замена устаревших и грубо неверных формулировок новыми, научно действенными и предметно оправданными, — вот основная заслуга Мизеса перед наукой, и уже одна эта заслуга всецело оправдывает появление его книги на нашем рынке. То, что создано Мизесом, может быть подвергнуто критике, и без

всякого сомнения будет еще много раз пересмотрено и перестроено; но то гнилое и отжившее, что им разрушено, уж не восстанет из праха.

Эта книга может быть рекомендована всякому, кто для какой бы то ни было цели интересуется основами теоретической статистики. Он найдет в ней ясный, наглядный, вполне доступный его пониманию ответ на все занимающие его вопросы. Но и компетентный читатель — математик, физик, биолог, социолог, экономист, инженер — найдет здесь для себя много ценного и интересного; Мизес по меньшей мере заставит его глубоко задуматься над теоретическими основами статистических методов, применяемых в его науке.

Острый и своеобразный стиль книги Мизеса представлял значительные трудности для перевода. Мы всюду видели нашу главную цель в том, чтобы возможно точнее и рельефнее передать мысль автора; читатель не упрекнет нас в том, что в порядке преследования этой цели мы иногда жертвовали стилистическими красотами. Известный призыв математика Кронекера «оставить изящество портным и сапожникам» содержит свою долю истины (которую, впрочем, не следует преувеличивать).

А. Хинчин.

Москва, 27 июля 1929 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В настоящей книге, не предполагающей у читателя никаких специальных математических познаний, излагаются основы исчисления вероятностей, как точной естественно-научной теории массовых явлений и повторных процессов. В качестве руководящей нити здесь повторяется то, что я обычно излагаю вот уже пятнадцать лет в своих лекциях и что по большей части мною уже опубликовано в различных сочинениях, точный список которых читатель найдет в конце книги. При этом внешнее оформление текста соответствует циклу лекций, который был мною прочитан под тем же названием сперва в 1914 году в Страсбурге, а затем в 1922 году в Берлине, для расширенной аудитории. Учитывая сильно увеличившийся размер книги, я прошу читателя смотреть на нее как на шесть последовательных лекций, соответствующих тем шести разделам, заглавия которых набраны крупным шрифтом. Остальные более мелко набранные заглавия имеют целью лишь особо подчеркнуть некоторые выражения, не претендуя на указание дальнейшего логического подразделения материала.

Я очень охотно согласился на предложение моего друга Ф. Франка опубликовать мою книгу в издаваемом им совместно с М. Шликом собрании «сочинений

по научному миропониманию». Ибо всякая теория, созданная естествоиспытателем для какой-либо группы доступных наблюдению явлений, образует собою часть некоторой научной картины мира. Однако обычная терминология приписывает словам «миропонимание» и «мировоззрение» метафизическое значение, выходящее за пределы чисто научного познания. Я считаю необходимым указать, что по отношению ко мне подобных притязаний быть не должно. Даже в тех случаях, когда я касаюсь вопросов, излюбленных философами, — я не могу сойти с точки зрения естественника и никогда не могу поставить себе иной задачи, кроме единственной: искать возможно более простого систематического описания чувственно воспринимаемых фактических состояний. Предметом теории вероятностей, как и всякой другой ветви естествознания, служат не какие-либо спекуляции, не мнения, не «формы рассудка», но исключительно доступные наблюдению факты.

И если эта книга не содержит почти ни одной математической формулы и по внешности мало похожа на математический или физический учебник, то все же автор чувствует себя определенно и исключительно математиком, разумея под именем математики, как это делалось встарь, всю совокупность точных наук. Тем, кто такую точку зрения считает слишком узкой, он может возразить только следующими словами Леонардо: «Тот, кто порицает высшую мудрость математики, питается смешениями и никогда не заставит умолкнуть противоречия софистических наук, способных научить лишь вечному крику».

Р. Мизес.

Берлин, июнь 1928 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

От Государственного издательства V

От редактора русского перевода VII

Предисловие автора X

Введение: Слово и понятие 1

Объяснения слов 3. Синтетическое определение 4. Терминология 6. Понятие работы в механике 7. Ценность рационального образования понятий 9.

I Раздел: Определение вероятности 11

Ограничение материала 12. Неограниченная повторяемость 13. Коллектив 15. Первый шаг к определению 17. Две различных пары костей 18. Предельное значение относительной частоты 19. Опытные основания азартных игр 21. Вероятность жизни и смерти 22. Вероятность в теории газов 25. Историческое замечание 27. Иррегулярность коллектива 29. Принцип невозможности системы игры 32. Пример иррегулярности 35. Окончательная формулировка определения 37.

II Раздел: Элементы исчисления вероятностей . 38

Задача исчисления вероятностей 39. Распределение коллектива 42. Непрерывное распределение 43. Сведение к четырем основным задачам 47. 1. Выбор 49. 2. Смешивание 51. Неточная концепция правила сложения 52. Случай равномерного распределения 54. Резюме и дополнение к правилу смешивания 55.

3. Разделение 57. Вероятности после разделения 59. Так называемые вероятности причин 62. 4. Связывание 63. Независимые друг от друга коллективы 65. Вывод правила умножения 68. Установление независимости 70. Связывание зависимых коллективов 72. Пример не связуемых коллективов 74.

III Раздел: Критика основоположений 75

Объем области практической применимости 76. Роль философов 78. Классическое определение вероятности 80. Равновозможные случаи... 82. ...не всегда бывают налицо 84. Геометрическая аналогия 86. Обнаружение равновозможности 87. Вероятность a priori 89. Особое положение равновозможности? 92. Субъективное понятие вероятности 94. Теория Криса 96. Парадоксы Бертрана 98. Якобы возможный мост между определениями, основанными на частотах и на равновозможности 101.

IV Раздел: Законы больших чисел 103

Две различные формулировки, данные Пуассоном 103. Точка зрения определения, основанного на равновозможности 106. Арифметическая иллюстрация 107. Апостериорная апелляция к частотам 110. Содержание теоремы Пуассона 112. Опровергающий пример 113. Несообразности 115. Правильный вывод 117. Резюме 119. Второй «мост» 121. Проблема Бейеса 122. Вероятности «причин» 124. Теорема Бейесса 125. Взаимоотношение между теоремой Бейеса и теоремой Пуассона 129.

V Раздел: Применения к статистике и теории ошибок 132

Разграничение между азартными играми и играми, основанными на искусстве 133. Проблема Марбе 136. Решение проблемы Марбе 138. Теория скучивания и закон серии 140. Сцепленные события 143. Общая задача статистики 145. Идея Лексисовой теории дисперсии 147. Среднее значение и дисперсия 149. Сравнение

действительной и ожидаемой дисперсии 151. Соотношение полов новорожденных 154. Статистика смертности со сверхнормальной дисперсией 156. Солидарность случаев 157. Существенная компонента колебания 159. Статистика самоубийств 161. Социальная и биологическая статистика. Учение о наследственности 164. Статистика в технике 166. Пример медицинской статистики 168. Исправление 169. Описательная статистика 172. Основы теории ошибок 174. Доска Гальтона 176. Колоколообразная кривая 178. Закон Лапласа 180. Приложения теории ошибок 181.

VI Раздел: Проблемы физической статистики. 183

Второй принцип термодинамики 183. Детерминизм и вероятность 185. Механизмы случая 188. Случайные колебания 190. Малые причины, большие следствия 191. Кинетическая теория газов 194. Порядок величины «невероятности» 198. Критика теории газов 201. Броуново движение 203. Временное течение явлений 205. Вероятностное последействие 206. Время пребывания и его предсказание 208. Опытный ряд Сведберга 212. Радиоактивное излучение 214. Предсказывание промежутков времени 217. Опытные ряды Марсдена и Барратта 219. Новейшее развитие физики атома 221. Статистика и закон причинности 225. Схема каузального объяснения 227. Границы Ньютоновой механики 229. Простота, как критерий каузальности 232. Отказ от причинной концепции 235. Резюме 237.

Примечания и добавления 241

ВЕРОЯТНОСТЬ
и
СТАТИСТИКА

ВВЕДЕНИЕ

Для того чтобы возможно короче пояснить смысл того противопоставления, которое я выразил в заглавии этой книги, я позволю себе привести шуточные слова одного англичанина, который однажды сказал, что существует три вида лжи: во-первых, ложь вынужденная, которая извинительна, во-вторых, ложь низкая, для которой нет никакого извинения, и в-третьих, — статистика. Приблизительно то же самое мы хотим сказать, когда в разговоре замечаем, что числами можно «все доказать», или, перефразируя известные слова Гёте, что числами «диспуты ведутся, из чисел системы создаются». В основе всего этого лежит взгляд, что заключения, построенные на основе статистических рассуждений или исчислений вероятностей, по меньшей мере очень не надежны, если не вовсе непригодны. Я отнюдь не хочу оспаривать, что много бессмысленного и не выдерживающего критики прикрывается именем статистики. Но целью последующего изложения является показать, что вполне возможно, исходя из статистических данных и пользуясь исправленным и надлежащим образом уточненным понятием вероятности, дойти до познаний и утверждений, которые по «мере истинности» и надежности, так же как и по практической пригодности, могут соперничать с дости-

жениями любой ветви точного естествознания. Правда, при этом я должен просить читателя пройти за мною длинный и наверно не лишенный трудностей путь, который поведет нас к цели через целый ряд подготовительных ходов мысли, могущих на первый взгляд показаться лишними.

«Вся наша философия есть исправление словоупотребления», сказал однажды Лихтенберг; скольких споров и скольких заблуждений можно было бы избежать в истории науки, если бы всегда хорошо помнили это изречение! Мы во всяком случае будем достаточно осторожны, когда ниже, отправляясь от слова вероятность, постепенно, путем целого ряда рассуждений, дойдем до целесообразного научного понятия вероятности. Я уже указал и впоследствии, как я думаю, обнаружится с полною ясностью, что в этом, т. е. в отыскании разумного определения понятия вероятности лежит ключ к выяснению взаимоотношения между статистикой и истиной.

СЛОВО И ПОНЯТИЕ

В разговорной речи мы легко и часто пользуемся выражением «вероятно». Мы говорим: вероятно, что завтра пойдет дождь, что сегодня в таком-то отдаленном месте выпадет снег или что в такой-то день прошлого года было теплее, чем сегодня. Мы говорим о бóльшей или меньшей вероятности, а также о невероятности виновности обвиняемого или правильности свидетельского показания. Мы выражаемся точнее, говоря, что вероятнее в этой лотерее получить главный выигрыш, чем добиться хоть какого-нибудь выигрыша в такой-то другой лотерее. Во всех этих случаях мы отнюдь не смущаемся, когда нас спрашивают о смысле этих вероятностных суждений, т. е. не смущаемся до тех пор, пока вопро-

шающий удовлетворяется описанием сказанного. Тогда в нашем распоряжении находится целый ряд выражений, которыми мы можем помочь себе; мы говорим о догадках, о неточном, несовершенном или недостоверном знании, о случайности, о более или менее веских основаниях правдоподобия и т. д.

Объяснения слов

Но трудности сильно возрастают, как только приходится дать более точное объяснение или тем более определение того, что называется «вероятностью». Кому-нибудь могла бы притти в голову мысль посмотреть в словаре, что собственно означает слово «вероятно». В тринадцатом томе словаря Якова и Вильгельма Гримм мы находим по этому поводу длинную справку. Там мы читаем в пояснение этого слова: probabilis, в старое время означало «сходно с истиной» или «похоже на истину», затем «с отблеском истины», только с середины XVII столетия «вероятно»; в английском до сих пор verylike употребляется наряду с probable. Затем следует целый ряд указаний, в которых объясняется употребление этого слова, по большей части у философов. Я передаю только некоторые: «Потому что вся вероятность есть нечто, находящееся этак посередине между истинным и ложным», говорит Томазиус (1688). «Вероятным называется усмотрение, противоположность которого не вполне противоречива или невозможна»,—так учит Реймарус в своем учении о разуме. А великий Кант говорит: «вероятным называется то, что, будучи принято за истину, имеет за себя больше чем половину уверенности». Может быть вслед за этим кто-нибудь захочет услышать, что может сказать по этому вопросу совре-

менная философия в результате своего векового развития. Поэтому я привожу здесь дословно то, что я нашел в словаре философских понятий 1910 г. Р. Эйслера: «Вероятность (субъективно) есть степень уверенности, покоющаяся на сильных или веских мотивах для суждения, однако так, что этим мотивам все-таки противостоят другие, которые хотят или должны быть приняты во внимание; объективно вероятно то, что наше мышление, опираясь на ряд (объективных) оснований, с известной надежностью чувствует себя в праве признать за истинное. В зависимости от рода и количества оснований или инстанций, на которых базируется суждение или оценка вероятности, существуют различные степени вероятности».

Что же, относительно ценности этих и подобных этим «философских» объяснений спорить не приходится. Они всегда заключаются в том, что одно слово заменяется другими, по большей части очень многими другими словами. Тот, кому последние кажутся более привычными, может видеть в этом приравнивании объяснение; во всяком случае найдутся люди, которые этого сделать не смогут. Если кто-нибудь лучше понимает, что означает «больше чем половину уверенности иметь на своей стороне», чем то, что означает «вероятно», то это исключительно его личное дело. Исправления терминологии мы во всех этих объяснениях слов не видим.

Синтетическое определение

Что же однако предпринять, чтобы возвыситься над очевидно негодным словарным уровнем? Способ образования понятий, который установился в точных науках за последние столетия, ясно и определенно указывает

нам путь, ведущий к успеху, если только все то, что достигнуто в математике и физике наших дней, можно считать за успех. Только для того, чтобы не слишком поспешно вгонять в новое русло обычные, не отличающиеся точностью мыслительные навыки, я — в виде подготовки к последующим более точным формулировкам — рассмотрю сначала пример развитой концепции процесса образования понятий, взятый из области гуманитарных наук, более близких каждому образованному человеку.

В своей книге о пролетарском социализме Вернер Зомбарт ищет подходящего определения предмету своего исследования [1]. Сделавши обзор различных соответствующих обычному словоупотреблению толкований, он продолжает: «остается следовательно только возможность принять социализм как идею, образовать разумное понятие, т. е. описать положение вещей, в котором существенные характерные черты (признаки) осмысленно связаны в живое единство,—понятие, «правильность» которого мы можем измерить только его плодотворностью в качестве творческой идеи в жизни и в качестве вспомогательной конструкции в науке». В самом деле, эти слова содержат почти все, что характеризует сущность научного образования понятий. Я делаю особое ударение на следующих двух признаках, которые я еще раз отмечаю: во-первых, содержание понятия выводится не из значения какого-либо слова и следовательно не зависит от какой-нибудь более или менее распространенной терминологии, но строится и отграничивается искусственно, и затем полу-

---

[1] Поскольку этот пример проводится автором только для того, чтобы уяснить, как строится определение важного понятия неформальным путем, здесь нет основания останавливаться на точке зрения Зомбарта по существу. *Ред.*

чает соответствующее словообозначение, как ярлык. И во-вторых, ценность образования понятия измеряется не тем, что его объем совпадает с каким-нибудь привычным кругом представлений, но исключительно тем, что оно может дать науке, а через нее и жизни как орудие дальнейших научных исследований.

Употребляя введенную Кантом терминологию, я бы мог также сказать: наше намерение заключается в том, чтобы дать синтетическое определение вероятности, а не аналитическое, причем вопроса о принципиальной возможности аналитических определений мы можем здесь не касаться.

Терминология

Еще одно замечание к первому из приведенных свойств синтетического определения: тот, кто в только что указанном смысле создаст новое научное понятие, безусловно захочет дать ему новое название, т. е. поискать слова, не имеющего уже другого, может быть, близкого по смыслу значения. Этим путем в науку в качестве специальных терминов проникло много заимствованных и иностранных слов, потому что, по понятным причинам, трудно придумывать новые слова на родном языке. И усилия «очистителей языка» могут принести только вред, если они не посчитаются с этим положением вещей, а наоборот, необдуманной германизацией до известной степени поведут вспять процесс образования понятий. Было бы чрезвычайно полезно для научного понятия вероятности, которое мы разовьем впоследствии, использовать такое неупотребительное в других смыслах слово, как, например, «Probabilität». Но, что поделаешь, это не соответствует терминологии, ко-

торая имелась до сего времени, и в конце концов иностранные слова для специального языка не неизбежны. Мы видим это по многим выражениям в механике: сила, работа и т. д.; при этом я не могу удержаться от указания, что для многих даже специалистов, для которых механика составляет профессию, понимание этих понятий стало бы гораздо легче, если бы они были обозначены латинскими терминами, а не словами обиходного языка. В конце концов ведь и исследователи только люди, которые большую часть своей жизни пользуются языком в его обиходном значении и подвержены всем опасностям терминологической путаницы, которой они иногда слишком охотно поддаются.

Понятие работы в механике

Прежде чем обратиться к определению нашего понятия вероятности, я в нескольких словах напомню те в некоторых отношениях сходные условия, которые мы имеем, например, в известном понятии работы в механике. Каждый из нас пользуется словом «работа» в самых различных значениях. Если я совсем откину такие более далекие значения этого слова, как встречающиеся в сочетаниях «капитал и работа» или «работа сама в себе» и т. п., то останется еще много таких, которые имеют очень мало или совсем не имеют ничего общего с работой в том смысле, как ее определяет точная наука. Определение, как известно, в его простейшей форме гласит: работа есть произведение силы на путь; точнее: скалярное произведение силы и вектора смещения; еще вернее: криволинейный интеграл силы. Это определение очень хорошо применяется к человеческой практике (для не математика достаточно

иметь в виду первую форму определения), — стоит только подумать о подъеме тяжести, вращении рукоятки и т. п. Но как мало годится оно в случаях деятельности, имеющей лишь отчасти механический характер, например в случае работы на пишущей машинке, игры на музыкальных инструментах. Почти невозможно утверждать, что здесь произведение силы и пути пальцев дают существенное мерило достижения. О работе, которую выполняет автор книги, художник, врач, в этом смысле не может быть и речи. Поддерживать в состоянии покоя значительную тяжесть на вытянутой руке есть тоже тяжелая работа, хотя здесь произведение силы на путь равно нулю. Во всяком случае очень сомнительно, является ли вычисленная, согласно теории, величина работы хотя бы приблизительным мерилом телесного напряжения при движениях, сопровождающих игры и спортивные упражнения. Ни для одного разумного человека в настоящее время эти обстоятельства не являются затруднением, потому что все давно привыкли различать обычное словоупотребление и научную терминологию. Тот, кто говорит о «работе» в смысле механики, автоматически изгоняет не идущие к делу ассоциации, которые это слово обычно вызывает.

Но так было не всегда, полная ясность создалась лишь постепенно, как плод долгого процесса развития; этому учит нас, например, спор картезианцев со сторонниками Лейбница о понятии живой силы. Измеряется ли «действие силы» произведением массы на скорость или произведением массы на половину квадрата скорости, это — не вопрос, который может быть решен, а дело произвольного наименования. Оба произведения имеют в механике свое значение — если во втором опу-

стить множитель $^1/_2$, все равно это утверждение останется в силе — и какое из них назвать «живой силой» — безразлично, «дело не в том, что вообще говоря обозначается словом «сила», говорит Роберт Майер, а в том, что мы хотим обозначить этим словом. «Несомненно, выбирая научному понятию то или иное наименование, мы примем во внимание некоторые соображения филологической целесообразности и хорошего вкуса. Но существенно только то, что определением достигается полезная цель. Таковою мы считаем общую цель науки: вносить порядок и обозримость в многообразие наблюденных явлений, предсказывать течение новых явлений и указывать, каким путем можно вызывать определенные желаемые события. В каждом из этих направлений научно-физическое понятие работы полностью себя оправдывает. Исключительно широкий взгляд на большую группу физических явлений оно позволило нам установить посредством закона о сохранении работы. Тот же самый закон дает возможность предвычислять ход различных явлений природы и позволяет машиностроителю и электротехнику рассчитывать размеры их установок. Никто теперь не сомневается в огромном теоретическом и практическом успехе, которого достигла механика, построенная на точно образованных понятиях. Упомянем еще вкратце об одном возражении, которое иногда приводилось против применимости и практической ценности «рационализации» образования понятий.

Ценность рационального образования понятий

Можно сказать: Да, легко построить непротиворечивую теорию из точно отграниченных искусственных понятий; но когда потом захочешь применить теорию к дей-

ствительности, то приходится ведь иметь дело исключительно с неточными явлениями, в которых имеют значение только понятия более расплывчатые, «естественно возникшие». Безусловно в этом есть доля истины, и здесь сказывается глубокий принципиальный дефект всякого теоретического рассмотрения действительности. Явления, которые мы наблюдаем, которые мы переживаем, всегда несравненно сложнее, чем их описывают самые обстоятельные и трудные теории. Нужно большое искусство, требующее хорошей научной школы, чтобы только подметить среди огромного множества фактов, сопровождающих данное явление, именно ту черту, которую теория выдвигает в качестве единственно важной. Однако было бы неправильным, или по крайней мере лежало бы вне линии развития науки пренебречь точными понятиями, как того требует современная философская школа Бергсона, и вернуться к тем расплывчатым представлениям, которые обычно называют наглядными, но которые в действительности определяются только неясной и неопределенной терминологией.

Если я, например, здесь на доске проведу мелом «прямую», что это будет за исключительно сложная штука по сравнению с тем, что обычно определяют как «прямую» в геометрии! Прежде всего это не линия, потому что обладает конечной шириной; собственно, это — трехмерное меловое тело, более того: это — скопление большого количества маленьких кусочков мела, и т. д. Тот, кто в детстве не видел, как чертит в школе учитель, не сразу поймет, что это меловое тело имеет общего с той прямой, которая есть кратчайшее расстояние между двумя точками. И все же мы знаем, что точные идеализированные понятия чистой геометрии неиз-

бежны, если мы хотим разобраться в окружающем нас мире. Нам необходимы точные понятия, потому что они просты, т. е. более доступны силам нашего рассудка. Была уже сделана попытка построить геометрию, в которой вместо «бесконечно тонких» линий были только полосы конечной ширины, но далеко на этом не ушли, потому что такой способ рассмотрения только гораздо труднее, чем обычный. Мы должны признать безоговорочно, что все теоретические построения, которыми пользуются в различных частях физики, включая геометрию, являются лишь несовершенными вспомогательными средствами для рационального воспроизведения эмпирически познанных фактов. Но я не верю, чтобы мог существовать иной путь развития науки кроме того, который начинает с простейших, а потому и точнейших теоретических подмостков, и затем уже продолжает стройку, постепенно прибавляя дополняющие составные части. Во всяком случае, для класса явлений, с которыми имеет дело теория вероятностей, я буду стремиться только к одной цели — той цели, которая уже достигнута в геометрии, механике и многих других отделах физики и к которой стремятся и все остальные ее отделы, а именно: дать «рациональную» теорию, построенную на возможно более простых, точных понятиях, которая при всем своем несовершенстве перед лицом действительности все же удовлетворительно передавала бы отдельные существенные черты ее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

После всех этих приготовлений приступим теперь к задаче точнее описать самое понятие вероятности. Из сказанного до сих пор уже следует, что прежде всего

нам нужно будет исключить из области, которую образует вульгарное значение слова «вероятно», все то, что не должно относиться к развиваемой здесь теории.

Ограничение материала

Наша теория вероятностей не имеет ничего общего с вопросом о том, насколько вероятно и вероятно ли, что Германия еще раз будет воевать с республикой Либерией. Точно так же, когда говорят о вероятности того или иного толкования определенного места из Анналов Тацита, то это находится совершенно вне области нашего исследования. Надеюсь, мне нет необходимости останавливаться на том, что нас здесь не касается так называемая «внутренняя вероятность» произведения искусства, и прекрасный диалог Гёте «О правде и вероятности произведений искусства» связан с нашей темой только случайным словесным созвучием. Мы также исключаем вопросы об объективной правильности библейских рассказов, для которых выдающийся русский математик А. Марков, преисполненный либеральных идей просветительного периода, определенно прибегает к авторитету исчисления вероятностей. Вместе с тем мы исключаем почти все вопросы так называемых «sciences morales», о которых великий Лаплас так увлекательно говорит в своем «Essai philosophique». Впрочем, для преувеличенного рационализма XVIII века характерно то, что он пытался беспредельно расширить область точных наук; мы не будем впадать в эту ошибку.

Приблизительно на границе того, что мы еще включаем в наше исследование, лежат столь часто затрагиваемые вопросы о вероятности показаний свидетелей и судебных приговоров, которые Пуассон поставил ос-

новной проблемой своего знаменитого творения. Но если вопрос идет о вероятности выигрыша в некоторой вполне определенной азартной игре, то мы попадаем прямо в точку. Стоит ли делать ставку на то, что при игре с двумя костями, при 24 бросаниях, по крайней мере один раз выпадет двойная шестерка, можно ли такое явление ожидать с «вероятностью», и даже с какой именно вероятностью—на такие вопросы мы чувствуем себя призванными отвечать. Наряду с этим есть задачи и более социально значительные, которые мы также относим к своей компетенции; таковы все вопросы, связанные со страхованием, вероятности смертей и заболеваний при совершенно точно определенных условиях, и т. п. Наряду с азартными играми и социальными массовыми явлениями, третью область, в которой мы успешно сможем работать при помощи нашего понятия вероятности, составляют некоторые механические и физические явления. В качестве типичного явления такого рода я могу назвать движение молекул в замкнутом сосуде или видимые под микроскопом движения частиц коллоидального тела. Коллоидами, как известно, называют те скопления мелко раздробленных, суспендированных в некоторой среде частиц, которые невооруженному глазу или невнимательному наблюдателю представляются однообразной, деформируемой массой.

Неограниченная повторяемость

Что общего между случаями, приведенными нами во вторую очередь, что характеризует их в отличие от других применений слова «вероятность», которые мы хотим исключить из нашего рассмотрения? Нельзя сомневаться в о д н о м общем признаке, которому мы при-

даем решающее значение: в азартных играх, в вопросах страхования и в проблемах движения молекул мы имеем дело с массовыми или повторяющимися явлениями. Бросанье пары хороших костей практически повторяемо почти безграничное число раз, и нам и в голову не придет, что кости или бокал для игральных костей могут постепенно износиться и погибнуть. Если нам нужно исследовать какой-либо вопрос страхования, то мы видим перед собою всю огромную массу застрахованных, мы видим частое повторение единичного случая, регистрируемого страховым обществом. Точно так же и в третьем примере массовый признак, неизмеримо большое количество молекул, заложен уже в самом представлении. С другой стороны, так же ясно видно, что признака многократной повторяемости, множественности недостает в тех случаях, которые я выше исключил: состояние войны с Либерией не повторяется неограниченно часто, колебания в толковании писателя в различных случаях настолько различны, что мы не можем здесь говорить о массовых явлениях; вопрос же о надежности библейских сообщений совершенно индивидуален, и его никак нельзя рассматривать как звено в цепи повторяющихся одинаковых вопросов.

Итак, твердо установим: при помощи рационального понятия вероятности, которое составляет исключительное основание исчисления вероятностей, мы считаем возможным охватить только такие случаи, в которых дело идет о явлении, могущем быть многократно повторенным; о явлении, осуществляющемся в огромном количестве экземпляров; физически говоря — о практически неограниченном ряде однородных наблюдений.

Хорошим примером массового явления, где учение о вероятностях находит себе применение, может служить исследование определенных качеств, например окраски лепестков, при выращивании большого количества однородных растений из данного запаса семян. Здесь мы можем ясно увидеть, что имеется в виду, когда говорят о повторном явлении. Сперва вы имеете перед глазами одно единичное явление, в данном случае — взращивание одного индивидуума растения и констатирование цвета его лепестков; но далее следует соединение очень многих таких явлений в единую совокупность. Отдельные явления отличаются друг от друга «признаком», который, собственно, и составляет предмет наблюдения; в нашем примере это — окраска цветка. Благодаря тому, что мы совокупность всех растений исследуем с точки зрения одного этого признака, происходит соединение в единое собирательное понятие. При игре в кости единичное явление составляет одно бросание костей и следующее за ним наблюдение выпавших очков. При игре в орлянку каждое бросание монеты есть единичное явление, и признаком служит появляющийся на верхней стороне монеты рисунок. В проблеме страхования жизни следует рассматривать как единичное явление жизненный путь застрахованного; наблюдаемым же признаком будет возраст, в котором он умирает, или момент времени, в который вступают в силу условия страхования. Когда мы говорим о вероятности смертного случая, то это может — согласно обосновываемой здесь точной концепции понятия вероятности — относиться только к известной с о в о к у п-

ности лиц, например к совокупности «застрахованных мужчин 41 года в Германии, профессии которых не опасны для жизни». О вероятности смерти определенного индивидуума, если бы мы даже знали о нем очень много, мы не только ничего не могли бы высказать, но это выражение вообще не имело бы для нас никакого смысла. В этом заложено одно из самых глубоких следствий нашей концепции понятия вероятности, к рассмотрению которой я еще вернусь более подробно.

Теперь нам надлежит ввести одно выражение, которое будет нам очень полезно при дальнейших исследованиях. Условимся называть коллективом совокупность событий или явлений, которые отличаются друг от друга каким-нибудь доступным наблюдению признаком (числом, окраской и т. п.); при этом я оставляю за собой право добавить в дальнейшем еще некоторые уточнения. Такой коллектив образуют, например, выращенные исследователем ростки гороха, отличающиеся друг от друга красной или белой окраской цветов. Коллективом является последовательность бросаний костей с регистрируемым каждый раз числом очков; совокупность молекул газа, у каждой из которых наблюдается известная скорость; наконец множество застрахованных, момент смерти которых был подвергнут регистрации. Основоположным для нашей концепции понятия вероятности является следующее требование. Сперва должен быть налицо коллектив, тогда только можно говорить о вероятностях. Определение, которое мы дадим ниже, вообще имеет дело только с «вероятностью признака в пределах данного коллектива».

После вышесказанного не трудно дать это определение в его самой общей форме. Будем исходить из случая игры в две кости. Признаком единичного бросания мы считаем число очков, которое обнаруживается на верхних гранях выпавших костей. Что будем мы называть вероятностью числа 12, т. е. двойной шестерки? Когда игра будет повторена много раз — пусть, например, сделано двести бросаний — то число таких двойных шестерок окажется очень небольшим, например пять. Частное $5 : 200 = {}^1/_{40}$ обычно называют частотой, точнее, «относительной частотой» появления двойной шестерки в пределах первых 200 игр. Если игру продолжать, примерно до 400, потом до 600 раз, и после каждого промежутка устанавливать относительную частоту двойной шестерки, причем число выпавших в течение всей игры двойных шестерок делить соответственно на 400 и 600, то мы получим частные, которые будут более или менее отличаться от полученного ранее значения ${}^1/_{40}$. Если бы при произвольно длительном продолжении игры, при 2 000, 4 000 и больше бросаниях, все еще наблюдались значительные отличия, то мы никогда бы не пришли к тому, чтобы говорить об определенной вероятности двойной шестерки. Основоположным для понятия вероятности эмпирическим фактом, подтверждающимся при игре в кости так же, как и при других приведенных выше массовых явлениях, служит то, что относительная частота различных признаков меняется все меньше и меньше, если все больше и больше увеличивать число наблюдений. Установим, что мы с самого начала будем вычислять частные

только с определенной точностью, например до трех десятичных знаков; тогда после некоторого числа бросаний относительная частота двойной шестерки вообще перестанет изменяться. Это «предельное (о том, что это означает, мы еще поговорим более подробно) значение» относительной частоты, которое необходимо должно быть правильной дробью, т. е. числом меньшим, чем единица, мы называем вероятностью выпадения двойной шестерки в пределах всей игры с двумя костями. Какова величина этой дроби, при этом совершенно безразлично.

Две различных пары костей

У меня здесь две пары костей, которые по внешности вполне сходны между собой и специально изготовлены для целей демонстрации. У одной пары мы находим, что относительная частота двойной шестерки при большом числе бросаний приближается к значению 0,028 или $^1/_{36}$, у другой пары она почти что в четыре раза больше. Нас не касается сейчас то, что одна пара костей называется «правильной», другая же «фальшивой», в обоих случаях применимо наше определение вероятности. Так, врач, ставящий диагноз больному, не интересуется тем, честный ли человек его пациент или нет. Я не могу здесь целиком провести опыт продолжительной игры в кости, потому что он займет много времени. Но если я даже только несколько раз брошу эти кости, то мы уже увидим, что почти каждый раз выпадает хотя бы одна шестерка. У другой пары дело обстоит иначе. На самом деле удастся установить, что частота шестерки у каждой из этих костей почти точно равна $^1/_6$, у тех же составляет приблизительно $^1/_3$. Если вы хотите ясно

овладеть понятием вероятности в том значении, в котором мы его употребляем, вы должны постоянно вспоминать об этих двух парах костей. Для каждой из них существует определенная вероятность двойной шестерки, но эти две вероятности значительно отличаются друг от друга.

Предельное значение относительной частоты

Слово «предельное значение», которым мы воспользовались выше, есть термин высшей математики. Но нам незачем много знать о том, каким образом его определяют математики, потому что для нас в этом имеют значение только такие вещи, которые доступны пониманию каждого профана. Мы будем вычислять относительную частоту признака, т. е. частное от деления числа его появлений на общее число всех наблюдений, с определенным числом десятичных знаков, не заботясь о том, каковы будут дальнейшие знаки: будут ли они нулями или другими цифрами. Если мы, таким образом, достаточно длительно проследим повторное явление, например игру в орлянку, и время $\theta\varphi$ времени будем вычислять частоту выпадения герба с установленной точностью, то может статься, что, начиная с какого-либо момента частота перестанет изменяться. Если мы ограничимся только одним десятичным знаком, то обычно сравнительно скоро, может быть, после 500 бросаний, мы увидим, что не наступает более никаких изменений, что относительная частота с точностью до одного знака точно составляет, скажем, 0,5. Если вычисляешь два знака, то приходится пойти дальше. Мы можем условиться после каждых 500 бросаний составлять частное и тем самым находить относительную частоту «герба»

для первых 1 000, 1 500, 2 000... бросаний, и может быть таким образом найдем, что при этом, начиная с 8 000 бросаний, на втором месте десятичной дроби всегда стоит «0», и, следовательно, относительная частота составляет 0,50. Конечно, такой опыт нельзя продолжать до бесконечности. Если два человека будут достаточно искусно работать вместе, то они могут довести число наблюдений до 1 000 в час. Теперь предположим, что на это дело потрачено 10 часов и замечено, что в последние два часа относительная частота остановилась на 0,50, не принимая во внимание дальнейших знаков. Более точный исследователь вычислит при этом и третий знак частного и, может быть, найдет, что он в самый последний час хотя и обнаруживал изменения, но небольшие. Такой результат опыта естественно приводит научно мыслящий ум к предположению, что если все дальше и дальше продолжать игру при тех же условиях, то третий, четвертый и наконец каждый следующий знак относительной частоты в конце концов примет определенное значение. Положение вещей, соответствующее этому предположению, мы коротко выражаем в словах: относительная частота признака «герб» стремится к предельному значению.

Мы дополняем теперь данное прежде определение коллектива следующей формулировкой: коллектив есть массовое явление или повторный процесс, короче—ряд единичных наблюдений, при котором обоснована предположение, что относительная частота появления каждого единичного наблюдаемого признака стремится к определенному предельному значению. Это предельное значение мы называем «вероятностью появления при-

знака в пределах коллектива». При этом, конечно, нет необходимости каждый раз повторять все тяжеловесное выражение; при случае мы позволим себе уже говорить просто «вероятность выпадения герба». Существенно то, что это на самом деле означает только сокращение речи, и что коллектив, к которому относится вероятностное суждение, должен быть точно определен. Теперь ясно, что о вероятности исхода какой-нибудь битвы в нашем смысле не может быть и речи. Здесь нет налицо коллектива, и наш способ определения непригоден, точно так же, как если бы мы поставили перед физиком задачу измерить механической меркой «работу», которую проделывает актер, исполняя свою роль.

Опытные основания азартных игр

Нам придется далее еще рассмотреть, как складывается решающий эксперимент определения вероятности в других приведенных выше случаях, при страховании жизни и в проблеме газовых молекул. Но сначала сделаем еще небольшое замечание по поводу азартных игр. Можно было бы спросить: откуда, собственно, мы берем уверенность в том, что практически осуществленная азартная игра в смысле относительных частот различных возможных исходов протекает так, как было только что описано? Действительно ли мы обладаем достаточной опорой для столь далеко идущего предположения о фактическом течении ряда опытов, только скромное начало которого мы ведь в каждом случае можем подвергнуть испытанию? Ну, не так уж ничтожен материал, составляющий нужный нам фундамент. Прежде всего это — большие игорные банки в Монте-Карло и других местах, где одна и та же игра повторяется миллионы

раз. Они при этом благоденствуют, вычисляя наперед свои виды на выигрыш на основании принятых ими твердых предельных значений относительных частот. То обстоятельство, что иногда банк претерпевает «крах», нисколько не говорит против этих допущений. Доказательством обратного было бы если бы вся прибыль, полученная с основания банка, значительно понизилась или даже перешла бы в дефицит, если бы, следовательно, банк в будущем потерял бы приблизительно столько же или даже больше, чем он с начала своего существования выиграл. Ни один разумный человек не может предположить, что это когда-нибудь случится. Точно так же, как с игорными банками, дело обстоит и с лотерейными предприятиями, которые в продолжение многих лет велись отдельными государствами и всегда давали самое полное согласие с допущением устойчивых значений относительных частот. Все это дает нам право допустить, что действительно имеются осуществимые игорные процессы, для которых наше предположение о стремлении относительных частот различных признаков к предельным значениям оказывается справедливым. И только такого рода явления мы будем рассматривать в дальнейшем ходе работы.

Вероятность жизни и смерти

«Вероятность смертного случая», с которой оперируют страховые общества, находится путем, который ничем существенным не отличается от пути, употребленного нами для определения вероятности в случае с игральными костями. Прежде всего следует точно отграничить определенный коллектив для каждого отдельного случая. Примером является составление «таблиц немецкой

смертности на основании данных 23 страховых обществ», которые долгое время находились во всеобщем пользовании. Прежде чем могли быть составлены таблицы с указаниями смертности, было произведено около 900 000 единичных наблюдений над лицами, застрахованными в одном из 23 страховых обществ. При этом наблюдение каждый раз охватывало весь срок, начиная от вступления лица в страховое общество и до его выхода оттуда. Один из рассмотренных коллективов был установлен следующим образом: совокупность мужчин, которые были застрахованы с нормальной премией на основании тщательного врачебного осмотра перед достижением ими 40-летнего возраста. Признак, который надлежало при этом наблюдать, был: наступление или ненаступление смерти в пределах 41-го года жизни. Были выделены случаи, в которых, по какой-либо причине, например отказа от страхования, признак не мог быть однозначно установлен. Число случаев этой категории, которое могло быть подвергнуто наблюдению до конца, составляло 85 020; в 940 случаях была констатирована смерть. Относительная частота, следовательно, составляла $940 : 85\,020 = 0{,}01\,106$. Это число означает — если отказаться от некоторых уточнений, которые здесь могут быть опущены — вероятность смерти на 41 году жизни для рассматриваемой категории лиц; или, в нашей терминологии, вероятность смерти в пределах точно отграниченного выше коллектива. До известной степени произвольным было при этом считать 85 000 наблюдений достаточными для того, чтобы уже называть вычисленную относительную частоту вероятностью, т. е. постоянным, не меняющимся при дальнейшем расширении поля наблюдений предельным значением. Никто не ста-

нет утверждать, что больше чем три первых знака десятичной дроби, т. е. 0,011, останутся устойчивыми. Всякий был бы очень доволен, если бы можно было поставить вычисление на более широких основаниях; легко понятные практические соображения препятствуют этому. Само собою разумеется также, что однажды установленное число не имеет вечного значения. Точно так же обстоит дело и с другими физическими измерениями. Устанавливается сила земного притяжения в каком-либо одном месте, и до тех пор делают вычисления при помощи этого установленного значения, пока новым измерением не обнаружится какое-либо изменение. В этом же смысле и в области страхования удовлетворяются тем, что достижимо в данный момент, и пользуются числом 0,011, как будто бы это было искомое предельное значение, до тех пор, пока не найдут другого значения, обоснованного лучше. Это означает, что в пределах совокупности всех будущих страхователей рассмотренной категории при ведении расчетов имеется в виду 11 смертей на 1 000 застрахованных на 41-м году жизни. Но за пределами этих точно отмеченных границ это число не имеет никакого значения. Совершенно бессмысленно было бы сказать, что некто NN, которому сейчас 40 лет, имеет вероятность 0,011 умереть в течение одного года. Потому что если, например, образовать коллектив из женщин и мужчин вместе, то коэффициент смертности для 40-летнего возраста, как это явствует из таблиц, окажется несколько меньшим. Но наш NN с таким же правом принадлежит к совокупности женщин и мужчин, как к совокупности одних мужчин, и ко многим другим подобным совокупностям. Может быть кто-нибудь думает получить значе-

ние тем более «верное», чем больше свойств индивидуума принято во внимание, т. е. чем теснее ограничен коллектив, членом которого индивидуум является; но на этом пути невозможно остановиться; в конце концов останется только один данный индивидуум, однозначно определяемый всеми своими свойствами. В настоящее время, например, страховые общества имеют обыкновение принимать во внимание при страховом договоре так называемую селекцию, а именно то обстоятельство, что лица, которые рано страхуются, обнаруживают в общем иной срок длительности жизни, чем застрахованные в более позднем возрасте. Селекционные таблицы смертности основываются на таком ограничении коллектива, при котором предполагается определенная давность страхового договора в момент смерти. Ясно, что в этом или подобном этому направлении можно итти и дальше. Но если бы мы хотели включить в коллектив все свойства индивидуума, то такой коллектив состоял бы только из одного элемента, т. е. коллектива бы вообще не существовало.

Вероятность в теории газов

Когда мы размышляем над молекулами газов или какой-либо подробной проблемой физической статистики, то условия только кажутся иными. Коллектив здесь состоит из совокупности движущихся взад и вперед молекул, заключенных между стенками цилиндра и поршнем. В качестве признака каждой отдельной молекулы мы рассматриваем, например, три прямоугольных компоненты ее скорости, или вектор скорости. Правда, никто еще не делал попытки фактически измерить все векторы скорости молекул, зарегистрировать их и вычислить, с ка-

кой относительной частотой появляется каждое отдельное значение. Физик, напротив, делает определенное допущение касательно относительной частоты или, лучше сказать, ее (предполагаемого) предельного значения, и только по некоторым следствиям этого допущения он судит о его правильности. Мы видим, что этот случай не так уж существенно отличается от предыдущего, если даже здесь и нельзя непосредственно произвести опыта для установления величины вероятности. Главный момент состоит в том, что и здесь основой всех рассуждений является существование предельного значения относительной частоты, некоторого ее окончательного значения, не меняющегося при дальнейшем увеличении массы газа.

Чтобы лучше уяснить себе связь с ранее рассмотренным примером вероятности смертного случая, определенной посредством фактического вычисления, вдумайтесь в следующую аналогию: занимаясь прямоугольным треугольником, геометр может, например, по теореме Пифагора вычислить его гипотенузу, после того как предварительное измерение показало ему, что соответствующий угол с достаточной точностью равен 90°; но он может также, не предпринимая измерения угла, сперва предположить, что треугольник прямоугольный, и потом уж сделать отсюда свои выводы и проверить их совпадение с наблюдением. В таком же положении находится физик, когда он применяет статистические понятия к молекулам или другим подобным объектам. Обычно в физике говорят (при этом я исключаю некоторые новейшие взгляды на этот вопрос), что скорость молекулы есть величина «принципиально» измеримая, хотя она и не может быть измерена обычными средствами.

Так и мы можем здесь заявить, что относительная частота и ее предельное значение — вероятность в пределах некоторого физически определенного коллектива, могут быть так же «принципиально» наблюдаемы и измеряемы, как и в ранее рассмотренных случаях, т. е. азартных играх и социальной или биологической статистике.

Историческое замечание

То, что я до сих пор указал для обоснования понятия вероятности, правда, противоречит в общем и целом тому, что в старых учебниках исчисления вероятностей предлагается как формальное «определение» вероятности. Но оно находится в полном согласии со всеми представлениями, которые с давних пор фактически употребляются в исчислении вероятностей. Особенно ясно это проявляется во введении Пуассона к его знаменитому, уже однажды нами упомянутому сочинению о «вероятности судебных приговоров». Он описывает, как в различных областях человеческого опыта обнаруживается явление, с которым мы познакомились, как с неизменяемостью относительных частот при большом числе повторений единичных наблюдений. При этом Пуассон пользуется терминологией, которой я до сих пор избегал, чтобы уберечься от смешений с некоторым другим ходом мысли, тоже, впрочем, введенным в теорию вероятностей Пуассоном или по крайней мере значительно им продвинутым. А именно: он обозначает факт устойчивости относительных частот, в пределах достаточно большого ряда опытов, как «закон больших чисел» и видит в существовании этого закона подлинное основание возможности исчисления вероятностей. В дальнейшем ходе своих исследований

он, правда, исходит из введенного Лапласом формального определения вероятности, о котором нам еще предстоит говорить, и выводит из него в конце концов аналитическими методами математическое предложение, называемое им снова «законом больших чисел». Впоследствии мы увидим, что доказанная Пуассоном математическая теорема на самом деле утверждает нечто совсем другое, чем то, что в виде общего опытного основания входит в начала нашей теории. Мы еще займемся дальше этим двояким применением одного и того же термина, которое уже вызвало весьма тяжелую путаницу. Тогда я буду иметь случай текстуально привести те слова, которыми Пуассон выразил постоянство относительных частот при большом числе опытов, как нерушимое основание всех вероятностных исследований.

Теперь я еще только хочу заметить, что защищаемое мною здесь воззрение, которое при обосновании понятия вероятности ставит на первый план ряд явлений, последовательность наблюдений, вероятности же сводит к относительным частотам в пределах этих рядов, — не совсем ново. Оно было в более диалектической форме, без непосредственного намерения построить исчисление вероятностей, пространно изложено англичанином Дж. Венном в его книге «Logic of chance» 1866. Современное развитие так называемой «Kollektivmasslehre», построенной Фехнером и Брунсом, также приближается к нашей концепции теории вероятностей. Яснее всего высказался в этом направлении Г. Гельм, один из основателей принципа энергии, в своем труде, появившемся в 1902 г. «Учение о вероятностях как теория коллективных понятий». Все эти и многие другие опущенные ради краткости попытки до сих пор не при-

вели к законченной теории вероятностей; они и не могли привести к ней, потому что не содержали в себе важнейшего признака понятия коллектива, к рассмотрению которого мы теперь и обратимся.

Иррегулярность коллектива

Не все, что мы должны высказать о коллективе, о ряде единичных наблюдений, массовом или повторном явлении, могущем стать предметом исследования теории вероятностей, не все еще заключено в требовании, чтобы относительные частоты различных признаков имели определенные предельные значения. Легко можно указать случаи, в которых предельные значения относительных частот устанавливаются без всяких затруднений, но в которых имело бы мало смысла говорить о вероятностях. Если мы, например, идем по длинной дороге, на которой через каждые сто метров поставлен маленький, а через каждую тысячу — большой столб, то, без всякого сомнения, если мы только рассмотрим достаточно большой кусок пути, почти в точности одна десятая пройденных нами столбов будут иметь признак «большой». Дробь $^1/_{10}$ только в том случае представляет нам относительную частоту с полной точностью, если начальный и конечный пункты рассматриваемого отрезка одинаково расположены относительно ближайших больших столбов. Однако, чем дальше мы будем итти, тем меньше будут становиться, как это непосредственно ясно, крайние отклонения относительной частоты от числа 0,1; другими словами, ее предельное значение равно 0,1. И здесь можно было бы, конечно, применить выражение, что «вероятность» встретить боль-

шой столб в данном ряду равняется 0,1. Однако более целесообразно, по причинам, которые мы сейчас узнаем, учесть те особенности, которые отличают этот пример от прежних, и ограничить определение понятия «коллектив» так, чтобы этот случай был из него исключен. Если мы рассматриваем как ряд единичных наблюдений постоянно продолжающиеся констатирования того, «большой» или «маленький» столб встречается на проходимом пути, то этот ряд наблюдений отличается от последовательности выпадений различного числа очков при игре в кости тем, что легко может быть указана его закономерность. В точности каждое десятое наблюдение ведет к признаку «большой», все же остальные к признаку «малый». Если мы только что прошли мимо большого столба, то незачем спрашивать о том, не будет ли следующий снова большим. Если же при игре в кости выпала двойная шестерка, то из этого ничего не следует о возможном результате следующего бросания. И столь же мало знает страховое общество, после того как один застрахованный умер на 41 году жизни, о том, что будет со следующим по списку, каким бы способом ни был составлен этот список. Различие, обнаруживающееся между рядами этих двух типов, носит чисто о п ы т н ы й характер. Теперь мы будем твердо придерживаться того, что только ряды, имеющие это свойство «беззаконности» или «иррегулярности», должны быть причисляемы к коллективам. Спрашивается только, как нам определить это свойство достаточно точно, чтобы не оставить определения слишком расплывчатым.

После сказанного не трудно найти целесообразную формулировку для «иррегулярности» ряда. Существен-

ное различие между рядом выпадающих чисел очков при игре в кости и закономерным рядом наблюдений над столбами у дороги состоит, очевидно, в том, что в последнем случае мы легко можем указать правило выбора, при помощи которого частоты будут изменены. Если мы, например, начнем с большого столба и будем регистрировать только каждый второй столб, который нам будет встречаться, то сейчас же обнаружится, что относительная частота больших столбов составляет уже не одну десятую, а одну пятую. Если же мы попробуем при игре в кости принимать в расчет только каждое второе бросание или применить какой-нибудь другой, сколь угодно сложный принцип выбора, то всегда обнаруживается, что частота двойной шестерки не изменяется, если только игру продолжать достаточно долго. Эта невозможность оказать влияние на шансы выигрыша системой выбора, *невозможность системы игры* есть характернейшее и решающее свойство тех рядов наблюдений или массовых явлений, которые составляют подлинный предмет исчисления вероятностей. К коллективу, к которому должно быть применимо исчисление вероятностей, мы предъявляем два требования: во-первых, относительная частота, с которой выступает в ряду какой-либо определенный признак, должна обладать предельным значением; во-вторых, *это предельное значение должно оставаться неизменным, если из всей последовательности произвольно выбрать любую часть и рассматривать в дальнейшем только эту часть.* Само собой разумеется, что выбранная частичная последовательность должна быть безграничной, как и сама основная последовательность, например так, что оставляется

каждый второй или каждый десятый член совокупности, или каждый, нумер которого есть полный квадрат, или простое число, и т. д. В остальном при составлении выбора фантазии предоставляется полная свобода. Нужно только иметь возможность решать вопрос о принадлежности или непринадлежности каждого отдельного бросания к выбранной частичной последовательности, независимо от результата этого бросания, т. е. при помощи некоторого правила, относящегося только к нумеру данного бросания, и установленного прежде, чем стал известен его исход. Поэтому мы кратко называем выбор в том смысле, какой здесь подразумевается, «выбором нумеров» и, следовательно, требуем, чтобы предельные значения относительных частот внутри коллектива были нечувствительны по отношению к любому выбору нумеров.

Принцип невозможности системы игры

Теперь, подобно тому, как и прежде, возникает вопрос: откуда, собственно, мы знаем, что существуют коллективы, которые удовлетворяют этому новому, весьма серьезному требованию? И здесь мы можем опереться только на (правда, очень богатый) опытный материал. Каждому, кто когда-нибудь был в Монте-Карло или читал про обстановку игорного банка, известно, какие запутанные и «вернейшие» системы измышлялись и испытывались некоторыми игорными шутами и продолжают испытываться вновь и вновь. Но печальный опыт показывает, что они не приводят к желанным результатам, т. е. к улучшению шансов игры, или, следовательно, к изменению относительных частот, с которыми появляются отдельные результаты в пределах система-

тически избранной последовательности игр. Это тот печальный опыт, к которому должны рано или поздно прийти все одержимые своими идеями игроки «по системе». На эти опыты мы опираемся в нашем определении вероятности.

Здесь приходит в голову сравнение, от краткого обсуждения которого я не хочу отказаться. Фанатические изобретатели и испытатели систем игры в Монте-Карло и других местах имеют несомненное сходство с другим классом «изобретателей», деятельность которых мы в настоящее время привыкли рассматривать с некоторым состраданием, а именно с известными уже несколько столетий, никогда не вымирающими конструкторами «perpetuum mobile». Эту аналогию, которая касается не только человеческой психологии, стоит проследить несколько дальше. Почему каждый образованный человек в настоящее время усмехается, когда сталкивается с желанием кого-либо сконструировать perpetuum mobile? Да потому, скажет он, что мы из принципа сохранения энергии знаем о невозможности такой конструкции. Принцип же энергии есть не что иное, как значительно обобщенное и многократно подтвержденное опытное положение, которое в конечном счете базируется на неудаче неисчислимых попыток построить perpetuum mobile. В настоящее время в теоретической физике принцип энергии часто прямо называют «принципом невозможности perpetuum mobile». О том, чтобы принцип энергии можно было как-нибудь «доказать», не может быть и речи. Исключительною очевидностью, которой он для нас обладает, он обязан только невероятному количеству опытного материала. Этот опытный материал, если не считать имеющих теперь только историче-

ское значение попыток построения perpetuum mobile, состоит, собственно говоря, из совокупности всех употребляемых в технике видов трансформации энергии. Если мы теперь, опираясь на опыт игорных банков, абстрагируем и принимаем за одну из основ исчисления вероятностей некоторый «принцип невозможности системы игры», то мы поступаем совершенно так же, как делает физика в случае с принципом энергии. Дело здесь обстоит так же в том смысле, что, если не считать экспериментов различных «рыцарей счастья», то принцип опирается прежде всего на опыт страховых обществ и подобных им предприятий. Если бы была возможность сколько-нибудь заметно изменить относительную частоту, с которой наступает случай выплаты страховой премии, вычеркивая, например, каждого десятого застрахованного, то была бы поставлена под вопрос вся финансовая база предприятия. Значению принципа энергии для электрического хозяйства соответствует значение нашего принципа о невозможности системы игры для страхового дела, именно он является неопровержимым основанием всех расчетов и всех мероприятий. Как о всяком значительном законе природы, мы можем сказать об этих двух предложениях: это — те ограничения, которые мы, на основании опыта, налагаем на наше ожидание будущего течения явлений природы. Из того факта, что предсказания оправдываются, мы можем вывести заключение, что во всяком случае существуют такие массовые или повторяющиеся явления, к которым применим принцип невозможности системы игры; и только к ним одним будут относиться все наши дальнейшие исследования по исчислению вероятностей.

Для того, чтобы сделать еще более ясным, как выглядит коллектив в своей «иррегулярности», я хочу произвести при вас маленький опыт. Этот опыт снова будет взят из области азартных игр; это объясняется тем, что все другие применения нашей теории требуют слишком больших и отнимающих много времени приспособлений. Итак, я вынимаю из мешочка, который содержит 90 кружков с нумерами от 1 до 90, наугад один кружок и записываю, какой вышел нумер: четный или не четный. Четное число я обозначаю через 0, нечетное через 1; я вынимаю 100 раз и записываю результаты под ряд в виде десяти строчек:

1 1 0 0 0 1 1 1 0 1 .
0 0 1 1 0 0 1 1 1 1
0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 .
0 1 0 0 1 0 0 1 1 1
0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 .
0 1 1 1 1 0 1 0 1 0
1 0 1 1 1 1 0 0 1 1
0 0 1 1 0 1 1 1 0 1
0 0 1 1 0 0 1 1 0 1
0 1 1 0 0 0 1 0 0 0

В пределах 100 опытов 51 раз вышла единица, т. е. относительная частота единицы равняется $^{51}/_{100}$. Если принимать во внимание только каждый второй опыт, т. е. учитывать только цифры, стоящие в первом, третьем, пятом... столбце, то в пределах 50 опытов мы находим 24 единицы, следовательно, относительная частота равна $^{48}/_{100}$. Если считать только цифры в первой,

третьей, пятой... строке, то для единицы получим $^{50}/_{100}$. Если считать только те 26 опытов, нумера которых — простые числа, т. е. 1-й, 2-й, 3-й, 5-й, 7-й, 11-й, 13-й, 17-й, 19-й, 23-й, 29-й, 31-й, 37-й, 41-й, 43-й, 47-й, 53-й, 59-й, 61-й, 67-й, 71-й, 73-й, 79-й, 83-й, 89-й и 97-й, то среди них мы находим ровно 13 единиц, т. е. снова частоту $^{50}/_{100}$. Наконец рассмотрим еще те 51 опыт, которым предшествовала единица, — потому что игра «по системе» могла бы, между прочим, привести к мысли ставить на нуль непосредственно после того, как вышла единица, — и найдем теперь, что здесь стоят 27 единиц, т. е. относительная частота равна $^{27}/_{51}$ или $^{53}/_{100}$. Опыт показывает нам, что при различных родах выбора, которые мы применяли, единицы появлялись всегда с приблизительной частотой $^1/_2$. Вы сами вероятно чувствуете, что при большом ряде опытов, которых я не могу здесь произвести за недостатком времени, явление иррегулярности могло бы быть показано еще гораздо более полно. Конечно, если эти 100 результатов опыта уже лежат перед нами в зафиксированном виде, то легко может быть намечен такой выбор номеров, при котором появляются только единицы или только нули, или единицы встречаются с какой угодно произвольной, лежащей между 0 и 1, частотою. Может также легко случиться, что при другой группе из 100 опытов одна из предпринятых здесь систем выбора нумеров даст сильно отличающийся результат. Принцип иррегулярности только утверждает, что если достаточно длительно производить опыты и постоянно применять все то же правило выбора, то в конце концов все-таки относительная частота более или менее точно окажется равной 0,50.

Я не могу касаться здесь частностей математического характера, тех рассуждений, которые необходимы, чтобы сделать определения и формулировки строгими в математическом отношении. Кто интересуется этим, пусть обратится к моей первой работе в четвертом томе «Mathematische Zeitschrift» 1918 г. или к выходящему на-днях первому тому моих «Vorlesungen über angewandte Mathematik», учебнику исчисления вероятностей, который излагает мою теорию в упрощенном и значительно улучшенном виде. Теперь позвольте мне только еще раз кратко собрать воедино все те положения, которые мы установили в качестве основания для последующего, и в которых мы усматриваем единственное пригодное для наших целей определение вероятности. Вот они:

1. О вероятности можно говорить только в том случае, если налицо имеется твердо определенный и точно отграниченный коллектив.

2. Коллектив есть массовое или повторное явление, удовлетворяющее следующим двум требованиям: относительные частоты отдельных признаков должны обладать определенными предельными значениями, и эти последние должны оставаться неизменными, если отобрать часть элементов совокупности произвольным выбором нумеров.

3. Выполнение последнего требования мы называем также принципом иррегулярности или принципом невозможности системы игры.

4. Нечувствительное к выбору нумеров предельное значение относительной частоты, с которой появляется определенный признак, мы называем «вероятностью» появления этого признака в пределах рассматриваемого

коллектива. Если это добавление к слову «вероятность» иногда опускается, то это делается только ради краткости, и его следует всегда подразумевать.

ЭЛЕМЕНТЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Я при случае и прежде уже упоминал, что излагаемая мною здесь концепция понятия вероятности, как предельного значения доступной наблюдению относительной частоты, имеет также и своих противников. Впоследствии я еще раз вернусь к важнейшим возражениям, в особенности к возражениям приверженцев «субъективной» концепции вероятности, которая, пожалуй, наиболее резко расходится с моею. Сейчас же я хочу кратко указать, каким образом основоположения, данные мною, находят себе применение в мире фактов, как они проявляют себя в практических вопросах, — одним словом, что вообще с ними можно делать. Ибо возможность применения теории к действительности есть единственный пробный камень ее ценности. Тут я, правда, должен начать с такой декларации, которая вызовет самое резкое возражение у сторонников взгляда, заключающегося в том, что в учении о вероятностях дело идет об особом роде логики. Сторонники этого взгляда утверждают (это не преувеличение), что в то время как в других науках делаются выводы из того, о чем знают, здесь ценнейшие выводы можно почерпнуть из незнания. «Абсолютное незнание условий, — читаем мы у Чубера, — при которых падает кость, ведет к заключению, что каждой грани этой кости соответствует вероятность $^1/_6$». Ну, мне кажется несколько загадочным, как при абсолютном незнании можно сделать различие

между двумя парами костей, которые я вам недавно демонстрировал, и из которых одна во всяком случае показывала очень сильно отличающееся от $^1/_6$ значение вероятности для шестерки или единицы, по крайней мере—согласно нашему определению вероятности. Но сейчас существенным для нас является не то, что, согласно моему воззрению, наше знание вероятности выпадения шестерки есть результат наблюдения и измерения (которое не при всех условиях может быть произведено над индивидуально данным объектом), согласно же другому взгляду это есть познание «a priori». Для нас дело сейчас идет прежде всего о том, чтобы возможно точнее описать общую задачу исчисления вероятностей, а ее нельзя искать ни в эмпирических констатированиях, ни в получении априорных познаний.

Задача исчисления вероятностей

Если стать на трезвую естественно-научную точку зрения, которая и в теории вероятностей принимает те же законы мышления, способы умозаключений и те же методические правила, как и везде, то как будто бы необходимо приходится признать следующее: существуют, очевидно, коллективы, которые связаны между собою, которые не чужды друг другу, например игра с первой из этих двух костей, игра со второй, и наконец игра с парой костей. При помощи двух первых из этих коллективов определяется последний. Задача исчисления вероятностей, и притом единственная, которая ему свойственна в данном случае, есть задача: отправляясь от вероятностей, определяемых в первых двух коллективах, рассчитать вероятности в пределах производного третьего коллектива. В качестве данных величин в задачу входят:

шесть вероятностей выпадения единицы, двойки, тройки... шестерки при бросании первой кости и шесть аналогичных чисел для второй кости. На основе этих данных мы можем, например, вычислить вероятность того, что сумма очков на обеих костях дает 12. Дело обстоит точно так же, как в геометрии, которая учит нас вычислять, по двум сторонам и углу между ними в данном треугольнике длину третьей стороны. Откуда нам известны данные нашей задачи, длины обеих сторон и угол, об этом геометр не спрашивает, или по крайней мере он не рассматривает установление этих исходных данных своей задачи, как проблему геометрии. Таким установлением занимается, например землемер, геодезист, который при своей работе должен применять целый ряд геометрических соображений, — и для этого мы позднее найдем в статистике полную аналогию. Геометрия, в тесном смысле, учит только тому, как по некоторым, предполагающимся данными величинам, можно определять другие, неизвестные, причем безразлично, каковы значения этих данных и каким путем они добыты. Так и правильно понятое исчисление вероятностей дает формулу для вероятности появления суммы 12 или двойной шестерки—формулу, которая имеет значение во всех случаях, пользуюсь ли я той или другой парой костей или комбинирую из этих четырех костей новую пару, и т. д. Какова величина каждой из шести вероятностей для первой и для второй из взятых костей, и откуда я эти величины знаю, это так же безразлично для расчета, как величина и происхождение данных в геометрической задаче.

Бесчисленные более или менее серьезные упреки, которые приходится слышать исчислению вероятностей,

отпадут сразу, как только его единственной задачей мы признаем: по данным вероятностям в пределах определенных исходных коллективов, вычислять вероятности в пределах некоторого производного от них коллектива. Вопрос, который обычно задается математику в насмешку: «Можете ли вы вычислить, как велика вероятность, что я не опоздаю на следующий поезд?» — подлежит отводу на том же основании, как вопрос: можете ли вы вычислить расстояние между этими двумя вершинами гор? Расстояние можно вычислить только в том случае, когда даны другие надлежащие расстояния и углы; и точно так же вероятность может быть вычислена, только когда известны другие, определяющие ее вероятности. Благодаря всеобщему школьному образованию, которое давно уже включает в себя некоторые элементы геометрии, человек, даже кое-как образованный, умеет отличить практическую задачу землемера от теоретической проблемы геометра (математика). По отношению к исчислению вероятностей и статистике это необходимое разъяснение еще не получило распространения.

Мы должны еще точнее рассмотреть, в чем состоит упомянутый нами многократно процесс получения «производного» коллектива из другого, данного. Только когда это понятие будет совсем конкретно усвоено, станет совершенно ясно, в чем состоит задача исчисления вероятностей. Но раньше я хочу ввести один простой и естественный термин, который даст нам возможность несколько проще формулировать наши положения. Сначала дело коснется только словесного сокращения, а потом — небольшого расширения применявшегося нами до сих пор понятия коллектива.

Члены или элементы коллектива отличаются друг от друга своими признаками, которые могут быть числами, как при игре в кости, цветами, как при игре в рулетку (rouge et noir) или какими-либо другими свойствами, которые могут быть установлены наблюдением. В коллективе существуют по меньшей мере два признака; в таком случае мы называем коллектив «простой альтернативой». В пределах таковой мы имеем две вероятности, которые, конечно, дают в сумме 1. Например, игра в орлянку представляет из себя альтернативу с двумя признаками «герб» или «надпись», каждый из которых, при нормальных условиях, имеет вероятность $^1/_2$. При вероятности жизни и смерти также имеется налицо простая альтернатива. Признаки здесь следующие: смерть между 40-м и 41-м днем рождения, или жизнь дольше 41 года. Вероятность первого признака в рассмотренном выше частном случае равна 0,011, отсюда вероятность второго, вероятность пережить возраст 41 г., равна 0,989. В других коллективах число признаков больше двух, например при игре с костью. Здесь налицо шесть различных возможных результатов опыта, в зависимости от того, какая из шести граней окажется наверху. В соответствии с этим существуют шесть вероятностей, и сумма их снова должна быть равна 1. Если все вероятности между собою равны, то каждая имеет значение $^1/_6$, и в этом случае мы называем кость «правильной». Но безразлично, имеем ли мы перед собою правильную или неправильную кость, шесть числовых значений вероятности для ее шести граней, эти шесть правильных дробей, в сумме дающих единицу, должны

быть известны, если мы хотим рассматривать коллектив как данный. И вот для совокупности этих шести величин полезно ввести краткое обозначение. Мы будем называть совокупность вероятностей появления отдельных признаков, которые существуют в пределах определенного коллектива, распределением этого коллектива. Выбор этого выражения будет понятен, если мы представим себе распределение шансов или видов на выигрыш в азартной игре. Если из шести игроков каждый делает ставку на одну из граней кости, то шансы «распределяются» между отдельными игроками так, что относительная доля каждого как раз равняется вероятности соответствующей грани кости. В случае правильной кости шансы «распределены» равномерно, в случае неправильной — неравномерно. В случае простой альтернативы все распределение состоит из двух чисел, которые дополняют друг друга до 1. Можно также, для того чтобы сделать слово «распределение» более наглядным, представить себе, как различные признаки коллектива «распределяются» в бесконечном множестве элементов коллектива. Если числа $^1/_5$, $^3/_5$, $^1/_5$ составляют распределение коллектива с тремя признаками, и, следовательно, $^1/_5$ есть вероятность первого и третьего, $^3/_5$ же — вероятность второго признака, то это означает только то, что при достаточно далеко продолженной последовательности наблюдений признаки распределяются так, что первый и третий охватывают каждый по $^1/_5$ всех случаев, второй же — оставшиеся $^3/_5$, и т. д.

Непрерывное распределение

Определенное таким образом понятие распределения легко позволяет распространить наши исследования и на

такие случаи, которые до сих пор не входили в круг нашего рассмотрения. Вообразим себе стрелка, который непрестанно стреляет в надлежащим образом установленную цель. Мы имеем здесь повторное явление, которое мы можем мыслить безгранично продолжаемым. Если мы представим себе цель, как это обычно делается, разделенной на известное число концентрических колец, и каждому кольцу, включая полный круг посередине и область, лежащую вне самого широкого кольца, припишем определенный нумер, то признаком выстрела может служить нумер той области, в которую он попал. До сих пор здесь нет ничего нового по сравнению с тем, что мы имели раньше. Число признаков или вероятностей, которые вместе составляют «распределение», равняется числу занумерованных областей. Обе предпосылки: существование предельных значений и «иррегулярность» мы конечно считаем выполненными, раз мы вообще говорим о вероятностях.

Но вот в опыте со стрелком и целью можно поступить несколько иначе. Как только произведен выстрел, можно измерить расстояние пули от центра цели и рассматривать это расстояние (вместо нумера кольца), как признак выстрела, как единичный результат наблюдения. Но расстояние есть в конечном счете не что иное, как число единиц масштаба, например сантиметров, и если мы действительно ограничимся только тем, чтобы измерять расстояния целыми сантиметрами, то мы имеем перед собою случай, мало отличающийся от предыдущего. На месте нумера прежней области попадания пули стоит теперь другой нумер, а именно число сантиметров, выражающее расстояние места попадания от центра. Если например наибольшее подлежащее еще

учету расстояние равняется 1 *м*, то мы имеем 101 различных признаков, а именно числа от 0 до 100, и столько же вероятностей, и распределение состоит из 101 правильных дробей, в сумме дающих 1. Но вы хорошо чувствуете, что не совсем правильно по отношению к понятию «расстояния» заменять его просто числом сантиметров: между 0 и 1 *м* существует больше различных расстояний, чем 100 или 101. Геометр говорит, что расстояние есть непрерывная переменная, оно может принимать любое значение между 0 и 100, не только конечное число целых значений, но бесконечно много значений. Так мы приходим к представлению, что здесь перед нами коллектив с бесконечно большим количеством различных признаков. В классических руководствах в таком случае говорят о «геометрической» вероятности, в противоположность «арифметрической» с конечным числом признаков. Конечно, нельзя задать бесконечного количества чисел, как бы это следовало сделать, если бы нужно было определить в прежнем смысле распределение коллектива при помощи фактического указания вероятностей всех признаков. К счастью, затруднение, встретившееся нам здесь, давно разрешено математиками. Всякий, кто знает хотя бы элементы высшей математики, понимает, чем здесь можно помочь.

Аналогия из другой области сделает, как я думаю, понятным для каждого, каким образом описать «распределение», простирающееся на бесконечное число признаков, на непрерывный ряд признаков. Предположим, что мы должны распределить определенный вес или массу, скажем 1 *кг*, между точками отрезка длиной в 1 *м*. До тех пор, пока речь идет о конечном числе материальных точек, распределение описывается указа-

нием конечной группы чисел, именно дробей, которые, выраженные в килограммах, обозначают вес отдельных точек. Если же вес в 1 *кг* распределен по всей длине метра непрерывно, или, как говорят, отрезок непрерывно нагружен массой, так например, как в тонком прямом стержне длиной в 1 *м* и весом в 1 *кг*, то здесь нельзя больше говорить об отдельных материальных точках; однако непосредственно ясно, что разумеется здесь под «распределением» массы по длине стержня. В месте, в котором стержень толще, скопляется больше массы на отрезке той же длины, и говорят, что здесь плотность массы, отнесенная к единице длины, больше. Если стержень всюду одинаковой толщины, то мы говорим о равномерном распределении массы; во всяком случае, распределение описывается указанием плотности в каждом данном месте. Это представление не трудно перенести на распределение вероятностей в случае со стрельбой в цель. На каждый отрезок расстояния между 0 и 100 *см* приходится определенная вероятность попадания, и общее распределение описывается указанием плотности этой вероятности, приходящейся на единицу длины. Мы не останавливаемся перед тем, чтобы здесь, где дело идет о непрерывно изменяющемся признаке, говорить о плотности вероятности, и потому определяем: «если коллектив содержит только конечное число точно отличимых друг от друга признаков, то распределение состоит из совокупности приходящихся на отдельные признаки величин вероятности; если же признак есть величина, непрерывно меняющаяся от опыта к опыту, например расстояние между двумя точками, то распределение устанавливается при помощи приходящейся на единицу длины в каждом данном месте

плотности вероятности. В случае с целью, если стрельба происходит вслепую, можно, например, допустить, что бóльшим расстояниям соответствуют бóльшие вероятности, так как внешние кольца имеют бóльшую площадь, нежели внутренние, при той же самой ширине. Таким образом мы пришли бы к допущению, что плотность вероятности увеличивается пропорционально радиусу или какой-либо его степени.

Впоследствии мы еще займемся некоторыми вопросами, касающимися коллективов с непрерывно изменяющимися признаками, при этом мы также покажем, как это понятие может быть распространено на области признаков большего числа измерений, на площади или объемы, вместо отрезков. Для нашей настоящей цели это отступление имело только своей задачей сделать вам наглядным, в возможно более широкой форме, понятие распределения данного коллектива. Пользуясь этим понятием, мы можем высказать несколько точнее, в чем состоит задача исчисления вероятностей.

Можно вполне определенным, подлежащим еще более детальному описанию способом производить новые коллективы из одного или нескольких точно определенных коллективов. Задачей исчисления вероятностей является вычислять из распределений, которые предполагаются данными для исходных коллективов, распределения производных коллективов.

Сведение к четырем основным задачам

Только одно выражение в этой формулировке нуждается в более подробном объяснении, а именно: каким способом могут быть «выведены» новые коллективы из

данных? Я уже говорил, что важно указать это совсем конкретно и точно, иначе все, что было сказано до сих пор, не имеет никакой ценности. Теперь я прибавлю существует в конечном счете четыре и только четыре способа построения одного коллектива из других, и все проблемы, которые трактуются в исчислении вероятностей, могут быть сведены к какой-либо комбинации этих четырех основных действий. Конечно, в конкретной задаче часто проводится по нескольку из этих основных действий, и каждое из них по нескольку раз. Мы теперь прежде всего подробно рассмотрим эти четыре действия. Для каждого из четырех случаев мы должны решить основную задачу, а именно — вычислить новое распределение при помощи распределений исходных. Если я теперь вам сообщу, что, не опасаясь натолкнуться на слишком большие трудности в понимании, приведу здесь решения всех четырех задач, и что, в частности, две первых будут исключительно просты, то я боюсь вызвать у вас мучительное подозрение. А именно подозрение, что вас хотят обманным путем провести мимо настоящих математических трудностей, которые ведь где-нибудь в исчислении вероятностей должны быть заложены — об этом свидетельствует уж одна испещренная формулами внешность каждого руководства. Однако, право же, у меня нет такого намерения. Когда я все операции, которыми связываются в исчислении вероятностей между собой коллективы, свожу к четырем сравнительно простым и легко объяснимым типам, я еще ничего не говорю о том, как бесконечно сложны могут оказаться комбинации основных задач в пределах отдельных проблем. Сообразите только, что вся алгебра вплоть до своих высочайших вершин состоит только из таких

построений, которые в конечном счете могут быть сведены к четырем так называемым основным арифметическим действиям. Кто умеет складывать, вычитать, умножать и делить, тот действительно обладает ключом для понимания любого алгебраического исследования. Но ключом (оставаясь при этом образе) нужно уметь владеть столь разнообразными способами, что все же ничего нельзя достигнуть без длительной подготовки и значительного напряжения.

Точно так же условия складываются в исчислении вероятностей. Я вовсе не надеюсь здесь, в этих кратких лекциях, научить вас решать такие проблемы, какие от Бернулли и Лапласа до новейшего времени постоянно занимали первоклассных математиков. Но, с другой стороны, ни один из нас, как бы далеко ни стоял он от всякого математического честолюбия и всякой математической деятельности, не захочет отказаться от знакомства с четырьмя основными действиями арифметики. Он не захочет этого как по причинам практическим, касающимся многих полезных применений счета в каждодневной жизни, так и в интересах развития собственного ума. Итак, я надеюсь кратким изложением четырех основных операций исчисления вероятностей достигнуть двух целей: дать вам возможность разрешить ту или иную случайно встретившуюся вам задачу, но прежде всего — дать удовлетворительное разъяснение вопроса, затрагивающего каждого образованного человека: в чем заключается подлинный смысл исчисления вероятностей.

1. Выбор

Первое из четырех основных действий, посредством которых образуется новый коллектив из данного,

мы назовем «выбором». Пусть нам дан, например, коллектив, который состоит из всех бросаний одной определенной кости или из ряда всех игр, происходящих на определенной рулетке. Новый коллектив пусть состоит из элементов первого, четвертого, седьмого... бросания той же самой кости, или второй, четвертой, восьмой, шестнадцатой... игры на рулетке. Вообще говоря: из элементов ряда производится выбор. Признак избранных элементов остается в новом коллективе тем же, как и в первоначальном; следовательно, в случае с костью, число очков, открывающееся на верхней грани, в случае же с рулеткой — красный или черный цвет. Спрашивается, каковы вероятности в пределах нового коллектива, т. е. например, какова вероятность красного цвета в пределах совокупности игр, которые, если считать все игры, имеют порядковыми нумерами различные степени числа 2. После того, что прежде подробно говорилось о свойствах коллектива, в особенности о его иррегулярности, не может быть никакого сомнения в том, как ответить на этот вопрос. Вероятность остается при переходе от старого коллектива к новому, образованному операцией «выбора», — неизменной. Все шесть вероятностей чисел очков, от одного до шести, в новом ряде игр точно таковы же, как в исходном коллективе. Ведь именно это требование было нами выставлено при определении иррегулярности. Дело здесь так просто, что все объяснения кажутся почти излишними. Тем не менее мы точно сформулируем этот результат в виде следующего предложения:

Из данного коллектива можно посредством «выбора» различными способами образовывать новые. Элементы нового коллектива представляют из себя ряд эле-

ментов данного, образованный определенным выбором нумеров; признаки остаются неизменными; распределение в новом коллективе совпадает с распределением старого.

2. *Смешивание*

Не менее, а может быть еще более просто второе действие, при помощи которого новый коллектив образуется из данного — вторая основная операция, которую я называю «смешиванием». Если мы снова берем за исходный коллектив игру с одной костью, при которой, следовательно, элементы состоят из следующих друг за другом бросаний, признаки же из шести различных чисел очков, выпадающих при бросании, то теперь может быть поставлен вопрос: какова вероятность получить четное число? Ответ на этот вопрос известен. Так как между числами от 1—6 имеется три четных числа 2, 4 и 6, то следует сложить между собою три вероятности выпадения двойки, четверки и шестерки; сумма трех вероятностей и даст тогда искомую вероятность выпадения четного числа. Правильность этого решения задачи каждый легко может усмотреть; нетрудно также вывести ее из определения вероятностей, как предельных значений относительных частот. Общая мысль, которая лежит в основе этого рассуждения, очень легко может быть раскрыта. Мы образовали из первоначального коллектива новый, который заключает в себе те же элементы, а именно все отдельные бросания, причем однако элементам приписываются новые признаки. В то время как прежде признаками для бросания были числа от 1 до 6, новый признак гласит: «четный» или «нечетный». При этом существенно, что несколько старых

признаков были заменены одним новым, но не было случая, чтобы несколько новых заступили место одного старого. В последнем случае вычисление новых вероятностей из данных было бы невозможным. Названием «смешивание» должно быть подчеркнуто то обстоятельство, что несколько признаков исходного коллектива друг с другом соединены, смешаны, или что происходит известное соединение, смешивание элементов, обладающих определенными признаками.

Неточная концепция правила сложения

В более старых, может быть известных вам со школьной скамьи способах выражения говорится о вероятности «наступления одного из нескольких событий», и теорема о вычислении неизвестных вероятностей на основании данных формулируется примерно так: вероятность получить либо двойку, либо четверку, либо шестерку равна сумме вероятностей этих трех отдельных возможностей. Эта формулировка однако неточна и остается неудовлетворительной даже и тогда, если определенно добавить, что таким путем могут быть складываемы только вероятности исключающих друг друга событий. Пусть вероятность смерти между 40-м и 41-м днем рождения равна 0,011, а вероятность жениться между 41-м и 42-м днем рождения пусть будет 0,009. Обе возможности исключают друг друга, и все же было бы бессмысленно утверждать, что вероятность того, чтобы или умереть, или в следующем году жениться, для сорокалетнего равняется сумме $0{,}011 + 0{,}009 = 0{,}020$. Разъяснение и вместе с тем правильную формулировку теоремы о распределении, которое получается при «смешивании», мы найдем, если возвратимся к понятию коллектива. Различие между

верным и неверным применением правила сложения заключается в том, что только те вероятности могут быть складываемы, которые в пределах одного и того же коллектива относятся к различным признакам. Смешивание состоит именно в том, что смешивают признаки элементов одного данного коллектива. В случае же, только что указанном, дело идет о двух совершенно различных коллективах. Один составлен из совокупности сорокалетних, которые распределяются согласно признаку наступления или ненаступления смерти в пределах сорок первого года жизни. Элементами второго являются мужчины сорока одного года, и подразделение происходит по признаку: заключение или незаключение брака в течение года. Оба коллектива представляют из себя простые альтернативы, и единственными возможностями смешения или сложения вероятностей было бы сложить, оставаясь целиком в пределах того или другого коллектива, обе вероятности (жизни и смерти или заключения и незаключения брака), причем суммой каждый раз была бы единица. Но никак нельзя складывать крест-на-крест.

Другой пример, непосредственно показывающий несостоятельность обычной формулировки, следующий: хороший игрок в теннис может иметь 80% вероятности победить в определенном турнире, например в Берлине. Его шансы в турнире, который в тот же день начинается в Нью-Йорке, равны 70%. Возможности победить тут и там очевидно исключают друг друга, но было бы полной бессмыслицей назвать вероятностью победить тут или там сумму 1,50. Объясняется это, как и в прошлом примере, тем, что дело здесь идет о двух различных коллективах, сложение же допустимо только по отношению к вероятностям в пределах одного коллектива.

Случай равномерного распределения

Один очень частный вид смешивания, который всем привычен, часто ставится во главу угла всего исчисления вероятностей; иногда даже полагают, что в нем заключается принцип всякого математического определения вероятности. В нашем первом примере, где вопрос шел о вероятности выпадения четного числа, конечно, безразлично, каковы вероятности двойки, четверки и шестерки. Можно рассматривать «правильную» кость, у которой каждая из шести сторон обладает вероятностью $^1/_6$, тогда суммой является $^1/_6 + ^1/_6 + ^1/_6$, что дает $^1/_2$. Но точно так же можно было бы говорить о «неправильной» кости, у которой опытами были установлены другие значения для трех вероятностей. Неизменным остается правило, что вероятность четного числа очков равняется сумме этих трех величин. Тот частный случай, о котором мы должны теперь немного поговорить, есть как раз случай «равномерного распределения» или «правильной» кости. Здесь можно, для того чтобы достигнуть правильного результата, рассуждать и несколько иначе, чем мы это делали прежде.

Можно исходить из рассуждения, что всего возможны 6 разных исходов одного бросания, а именно числа очков от 1 до 6, и каждый из этих шести случаев одинаково вероятен. Теперь начинается то небольшое изменение, которое мы даем нашему рассуждению: из шести возможностей три «благоприятны» имеющемуся нами в виду событию, а именно появлению четного - числа. Поэтому искомая вероятность четного числа очков равна частному $3 : 6 = ^1/_2$, т. е., как обычно выражаются, отношению числа «благоприятных событию»

возможностей к общему числу всех возможностей. Ясно, что здесь в самом деле может быть установлено общее правило, обнимающее собою все те случаи смешивания, в которых все признаки в пределах первоначального коллектива обладают равной вероятностью. Если мы обозначим число этих признаков буквой n, так что вероятность каждого единичного признака составит $\frac{1}{n}$, а число тех из этих признаков, которые объединяются в производном коллективе, обозначим буквой m, то, чтобы получить (в пределах нового коллектива) вероятность нового признака, мы должны, согласно правилу сложения, образовать сумму из m слагаемых, величина каждого из которых равна $\frac{1}{n}$. Можно теперь сказать проще, что искомая вероятность есть $m:n$, т. е. равняется частному от деления числа «благоприятных» признаков на общее число всех признаков. Мы вернемся впоследствии к тому, как злоупотребляли применением этого правила расчета для того, чтобы построить на нем иллюзорное определение вероятности. Сейчас для нас важно только понять, что отыскание вероятностей посредством счета равно вероятных благоприятных и неблагоприятных возможностей является только весьма частным случаем образования нового производного коллектива из данного посредством смешивания.

Резюме и дополнение к правилу смешивания

Я и здесь дам сжатую формулировку правила смешивания в том виде, как оно стало для нас ясным на основе понятия коллектива:

Из данного коллектива, охватывающего больше двух

признаков, можно различными способами при помощи «смешивания» построить новый коллектив; его элементы те же, что элементы исходного коллектива, а новые признаки суть соединения признаков старого коллектива (например, четные или нечетные числа, вместо отдельных чисел); распределение в пределах нового коллектива выводится из данного, путем сложения вероятностей всех прежних признаков, которые соединены в один новый.

Как это правило сложения применяется в простых случаях, мы уже видели на примерах. Я хочу только еще заметить, что это правило допускает осмысленное расширение на те, выше уже упомянутые коллективы, в которых, как в примере со стрельбой в цель, число признаков бесконечно. Высшая математика учит, что в таких случаях на место сложения отдельных слагаемых становится сходное, правда несколько более трудно определимое действие, которое называют интегрированием. Если в первоначальном коллективе дана плотность вероятности для каждого значения расстояния от центра, то в результате известного смешивания мы находим вероятность того, что расстояние заключено между 0,5 *м* и 1,0 *м* и, следовательно, выстрел попадает в наружную половину цели, в виде интеграла от данной функции плотности в пределах от 0,5 до 1,0. Эти указания удовлетворят того, кто посвящен в основные понятия и способы выражения математического анализа; все остальные слушатели могут быть уверены, что эти вещи, правда, полезны и даже необходимы для фактического решения отдельных задач исчисления вероятностей, но для понимания занимающих нас общих вопросов не имеют особого значения.

3. *Разделение*

Мы уже познакомились с двумя основными действиями, служащими образованию новых коллективов, с выбором и смешиванием, и теперь переходим к третьему, которое я называю «разделением». Выражение это скоро станет вам понятным; между прочим оно должно напоминать и о том, что мы здесь имеем дело с делением вероятностей. Для того, чтобы по возможности облегчить вам усвоение понятия «разделения», я снова воспользуюсь тем же первоначальным коллективом, который служил нам уже в двух других случаях — выбора и смешивания. Его элементами являются бросания одной кости, его признаками — появляющиеся на верхней грани кости числа очков. Даны снова шесть вероятностей (с суммой 1) выпадения чисел от 1 до 6, причем не предполагается, что каждая из этих вероятностей имеет значение $^1/_6$. Новый вопрос, который теперь ставится, и ответ на который ведет к операции разделения, гласит так: как велика вероятность того, что бросание, о котором уже известно, что его результат есть четное число, дает число очков 2? Может быть этот вопрос производит несколько искусственное впечатление; тогда я сейчас же могу привести его к виду, который часто встречается в повседневной жизни. Мы ожидаем трамвая у остановки, у которой проходят вагоны шести различных линий; пусть среди них имеются три линии, по которым всегда ходят трамваи с двойными вагонами, и три, по которым ходят только одиночные. Пусть мы издали увидели, что приближается трамвай, состоящий из двух вагонов; как велика тогда вероятность того, что это — трамвай некоторой определенной

из тех трех линий, которые обслуживаются двойными? Конечно, должно быть дано первоначальное распределение, состоящее в данном случае из шести отдельных вероятностей (т. е. практически относительных частот) появления трамвая каждой из шести линий. Если все эти шесть вероятностей равны между собою и, следовательно, равны $^1/_6$, соответственно случаю «правильной» кости, то вы без затруднения ответите, что искомая вероятность имеет значение $^1/_3$. Это можно аргументировать примерно так: в целом рассмотрению подлежат три различных, одинаково вероятных возможности, из которых одна только «благоприятна», следовательно мы имеем, согласно прежнему правилу, вероятность $^1/_3$. Однако этот способ умозаключения не во всех случаях применим, он тотчас же отказывается служить, как только вероятности различных трамвайных линий (или граней кости) не являются с самого начала одинаковыми. К полному решению вопроса и достаточно общему взгляду на проблему мы приходим только, точно исследуя, из чего собственно состоит новый производный коллектив. Потому что для нас уже ясно, что вопрос о вероятности только тогда имеет смысл, если предварительно точно очерчен коллектив, в пределах которого эту вероятность следует искать.

Если мы, ради большей простоты выражения, снова вернемся к задаче с костями, то мы можем так описать производный коллектив: элементами рассматриваемого ряда являются теперь не все бросания кости, а только те, признак которых — четное число очков; признак в пределах нового коллектива остался тот же — число очков, только теперь не всякое число очков выступает в качестве признака, а только 2, 4 и 6. Мы говорим,

что произошло «разделение» первоначально данного коллектива, причем элементы разделились на два класса. Один из классов, характеризуемый тем, что признаками его элементов являются четные числа, составляет элементы производного коллектива. Важно уяснить себе то, что это разделение есть нечто совсем иное, чем рассмотренный нами прежде выбор нумеров; там из совокупности всех бросаний выделяется частичная последовательность посредством выбора известных порядковых нумеров, причем для того, чтобы решить вопрос о принадлежности отдельного бросания к этой последовательности, нам не нужно знать его результата; мы видели также, что в пределах созданной таким путем последовательности все вероятности те же, что в пределах первоначального коллектива. Теперь же, когда мы имеем дело с разделением, выбор сохраняемых элементов происходит определенно в зависимости от признаков, и вероятности от этого существенно изменяются; мы сейчас перейдем к исследованию того, каким образом происходит это изменение.

Вероятности после разделения

Предположим, что вероятности в пределах данного коллектива для появления результатов от 1 до 6 равняются соответственно 0,10, 0,20, 0,15, 0,25, 0,10 и 0,20. Сумма этих шести чисел равна единице, причем не важно, имеем ли мы сейчас в виду игру в кости или трамвайные линии, точно так же, как безразлично, каким путем добыты эти шесть чисел. Если мы сложим вероятности двойки, четверки и шестерки, т. е. числа 0,20, 0,25 и 0,20, то мы получим сумму 0,65, как вероятность выпадения четного числа. Следовательно,

согласно смыслу понятия вероятности, результаты с четным числом очков, при достаточно продолженном наблюдении составляют 65% совокупности всех элементов. Среди первых 10 000 элементов найдутся таким образом около 6 500 таких, признаки которых — четные числа. К этим элементам принадлежат около 2 000 таких, которые имеют признаком двойку, так как относительная частота двойки составляет 0,20 в достаточно длинном ряду. Если теперь мы построим новый коллектив, получающийся из прежнего выкидыванием всех элементов с нечетными признаками и, стало быть, содержащий только элементы с четными признаками, то среди 6 500 первых из них найдется 2 000 с признаком 2, относительная частота которого, следовательно, есть $2\,000 : 6\,500 = 0{,}377$. Так как вычисление, произведенное нами здесь, собственно точно только для бесконечно длинных рядов наблюдений, то мы в числе 0,377 уже имеем правильное предельное значение относительной частоты или вероятности наступления признака 2 в пределах нового коллектива. Общее правило, по которому следует решать такого рода задачи, легко может быть выведено из приведенного примера. Нужно сперва образовать из данных вероятностей сумму тех, которые соответствуют выбранным и сохраненным при разделении признакам (в нашем примере двойка, четверка и шестерка), и затем разделить первоначальную вероятность имеющегося в виду признака (в нашем примере — двойки) на эту сумму — $0{,}20 : 0{,}65 = 0{,}377$. Таким образом мы действительно имеем дело с законом деления вероятностей.

Очевидно желательно различать особыми обозначениями те две вероятности одного и того же признака,

с которыми мы здесь имеем дело, отличать данную вероятность, существующую в пределах первоначального коллектива, от вычисленной, существующей в пределах нового коллектива, образованного «разделением». Применяемые обычно с этой целью названия кажутся мне, несмотря на их безусловную наглядность, несколько неудачно выбранными, а именно: обычно говорят о вероятности «a priori» и вероятности «a posteriori», имея в виду в первом случае данное, а во втором — выведенное значение. Уже одно звуковое сходство этого наименования с известной общефилософской терминологией, правильность которой не является неоспоримой, нужно признать недостатком. Прибавим еще, что в классическом исчислении вероятностей выражения «a priori» и «a posteriori» употребляются и в другом смысле, а именно для несущественного в нашем исследовании различения между такими первоначальными вероятностями, которые добыты эмпирическим путем, и такими, которые приняты на основании каких-либо гипотез. Поэтому будет лучше, если мы изберем названия более скромные, не обремененные слишком широким общим значением, и просто будем говорить об исходной вероятности и производной или окончательной вероятности, имея при этом в виду вероятность наступления принятого во внимание признака, в первом случае, в пределах первоначального коллектива, а во втором — в пределах производного. В нашем числовом примере признак «два» (т. е. грань кости, показывающая два очка, или вторая из наших трамвайных линий) имеет первоначальную вероятность 0,20 и окончательную вероятность $0{,}20 : 0{,}65 = 0{,}377$.

Я не могу обойти молчанием и другую, тоже неправильную и запутывающую терминологию, которая примыкает к задаче разделения. При игре в кости, когда требуется найти вероятность выпадения двойки среди четных чисел 2, 4 и 6, часто говорят так: появление четного числа может иметь три различных «причины» или может быть приписано трем различным «гипотезам»; как причину или гипотезу рассматривают появление одного из трех чисел 2, 4 и 6. Соответственно с этим, вычисленная нами окончательная вероятность 0,377 называется также вероятностью того, что результат «четное число» должен быть приписан наступлению причины «два». Таким образом будто бы создается совсем особая глава теории вероятностей, которая в противоположность обычно рассматриваемой вероятности «событий» учит вычислять вероятности «причин событий» или даже «гипотез о событиях». Задача разделения при этом обычно ставится в такой форме.

Пусть на стол поставлены три урны, наполненные черными и белыми шарами. Элементом первоначального коллектива является следующий двойной факт: опускают руку произвольно или наугад в одну из урн, вынимают один из лежащих в ней шаров и устанавливают как признак: во-первых — цвет шара, во-вторых — нумер урны. В целом, следовательно, имеются шесть различных признаков, а именно «белый цвет и первый нумер», «черный цвет и 1-й нумер» и т. д. Шесть соответствующих вероятностей предполагаются заданными. Если теперь известно, что результатом наблюдения явился белый шар, но неизвестно, из какой урны он был вынут, то

можно поставить вопрос о вероятности того, что белый шар был вынут именно из первой урны, или что появление белого шара имеет своей «причиной» то обстоятельство, что рука, вынувшая шар, была опущена в первую урну. Решение вполне аналогично прежнему, нужно разделить первоначальную вероятность для события «белый цвет номер 1» на сумму вероятностей трех событий: «белый цвет, нумер 1, 2 или 3». Несколько метафизическую форму выражения можно объяснить исторически тем, что правило разделения в этом смысле было выведено в середине XVIII столетия англичанином Бейесом, и с тех пор в почти неизмененном виде повторяется во всех учебниках.

Прежде чем перейти к четвертому и последнему основному действию, мы, как и в прежних случаях, коротко резюмируем определение операции разделения и метод решения соответствующих задач. Из данного коллектива с числом признаков больше двух можно различными способами построить новый коллектив при помощи «разделения»; элементами нового коллектива являются те элементы старого, признаки которых принадлежат известному частичному множеству первоначального множества признаков; признак каждого сохраненного элемента остается неизменным; новое распределение получается в результате деления данных вероятностей отдельных сохраненных признаков на сумму вероятностей всех этих признаков.

4. Связывание

Все три до сих пор рассмотренных основных операции: выбор, смешивание и разделение, имели то общее,

что во всех этих случаях из данного коллектива определенным предписанием, которое касалось известных действий над элементами и признаками, строился новый коллектив. Теперь, в последнем из четырех исследуемых действий, мы познакомимся с такой операцией, которая образует из д в у х данных исходных коллективов — о д и н новый. Кстати мы в первый раз встретимся с различными формами взаимоотношений между двумя или несколькими коллективами. Я называю это четвертое основное действие «связыванием». Пример, которым мы начнем исследование связывания, мы постараемся построить, по возможности примыкая к нашим прежним задачам с костями. Пусть каждый из двух исходных коллективов состоит из ряда бросаний кости, произведенных обычным способом, так что признаками в пределах каждого из этих коллективов служат числа очков от 1 до 6, с определенными вероятностями, которые в этих двух случаях могут быть и не равны между собою. Производный коллектив, результат связывания, имеет своим элементом бросание о б о и м и к о с т я м и, признаком же те д в а ч и с л а, которые появляются на верхних гранях наших двух костей. Требуется вычислить вероятность выпадения определенной пары чисел, например, 3 на первой кости и 5 на второй. Наши две кости при этом мы представляем себе хорошо различимыми, они, например, соответственно занумерованы 1 и 2 нумером, или окрашены в различный цвет, или обладают другими отличающими признаками. Тот, кто в школе изучал хотя бы первые основы исчисления вероятностей или кто сам когда-нибудь думал над этими вопросами, тот знает, как решить в примитивной форме намеченную здесь проблему. Говорят, что здесь дело идет о вероят-

ности «совместного наступления событий» и предписывают перемножить между собою данные две вероятности. Если, например, $^1/_7$ есть вероятность получить «3» на первой кости, $^1/_6$ вероятность получить «5» на второй кости, то $^1/_7 \cdot {}^1/_6$, т. е. $^1/_{42}$ есть вероятность двойного результата «3,5». Правило становится очень наглядным, если представить себе, что сперва следует выделить $^1/_7$ всех бросаний для того, чтобы первая кость дала результат «3», потом надо от этой седьмой части взять еще $^1/_6$ для того, чтобы вторая кость показывала «5». Однако ясно и то, что это правило умножения, так же как и правило сложения, нуждается в более строгом обосновании и точной формулировке, чтобы быть безупречным. Так, например, вероятность того, что при бросании двумя костями сумма очков будет «8», а разность «2», не может быть найдена как произведение соответствующих отдельных вероятностей.

Я теперь обращусь к этим несколько более тонким исследованиям и при этом, чтобы быть покороче, буду пользоваться, в качестве временного приема, простейшими элементами буквенной алгебры, не опасаясь, что это как-нибудь повредит понятности излагаемого.

Независимые друг от друга коллективы

Если мы будем обращать внимание сперва только на число очков, показываемое первой из двух костей, то среди n первых бросаний мы установим, например n_3 таких, при которых выпадает число «3». Тогда отношение $n_3 : n$ есть относительная частота наступления числа «3» для первой кости, и предельное значение дроби $n_3 : n$, при неограниченно продолжаемом бросании, есть данная вероятность числа очков «3» для первой кости.

Теперь мы будем каждый раз, когда первая кость показывает «3», рассматривать число очков, которое одновременно, т. е. при том же самом бросании, показывает вторая кость. При этом числа от 1 до 6 будут сменять друг друга в том или ином порядке. Часть из тех n_3 бросаний, которые мы сейчас рассматриваем, например n_5 из них, будут как раз давать на второй кости число «5», так что относительная частота числа очков «5» равняется $n_5 : n_3$ для второй кости. Это однако не есть частота числа «5» в пределах первоначально-данного второго коллектива, состоящего из всех бросаний второй кости, так как ведь мы теперь рассматриваем только определенную частичную последовательность этих бросаний, а именно те из них, в которых первая кость показывала «3». Образованная таким образом последовательность элементов коллектива представляет собою нечто новое по сравнению с тем, что мы знали до сих пор. Это, с одной стороны, не «выбор нумеров», как мы его рассматривали вначале, при котором бросания, которые должны принадлежать к частичной последовательности, выбирались по определенному арифметическому закону, но это и не «разделение», при котором элементы, обладавшие известными избранными признаками, сохранялись, а другие исключались. Нам придется ввести новое обозначение, которое мы выберем возможно более наглядным; мы скажем, что эта частичная последовательность второго коллектива «выкинута»[1] посредством первого, точнее: «выкинута» при помощи признака «3», принадлежащего первому коллективу. Ясно, что под этим подразумевается. Частичную последовательность

[1] «ausgewürfelt» *(прим. перев.)*.

можно «выкинуть» из любого ряда элементов, приводя элементы этого ряда в соответствие с элементами другого определенного коллектива, и выделяя только те элементы первоначального ряда, соответствующие которым показывают тот или иной определенный признак. При помощи первой кости можно «выкинуть» шесть различных частичных последовательностей из ряда бросаний второй кости: одну при помощи признака «1», вторую числом очков «2», и т. д.

Рассмотренное нами выше отношение $n_3 : n_3$ было относительной частотой числа очков «5» в пределах частичной последовательности, «выкинутой» из ряда бросаний второй кости при помощи числа «3» первой кости. Допустим, что это отношение при неограниченно продолжаемой последовательности опытов стремится к предельному значению, и притом к тому же самому, к которому приближается относителеная частота числа «5» в ряду всех бросаний второй кости. Такое допущение легко понятно. Оно собственно только утверждает, что «выкидывание» частичной последовательности оказывает на последовательность всех бросаний второй кости такое же влияние, как, например выбор нумеров. Разве кто-нибудь может подумат, что шансы получить «5» на второй кости изменятся благодаря тому, что будут приняты в расчет только т е б р о с а н и я, при которых первая кость дает «3»? Если этот вопрос задать скептику, то он ответит: «Смотря по тому, насколько «независимы» бросания второй кости от бросаний первой». Что однако означает «независимы»? Мы имеем известные представления о том, когда два коллектива становятся «зависимыми». Например, игру с двумя связанными короткой ниткой костями нельзя назвать соединением

двух независимых коллективов. Однако к определению независимости в точном естественно-научном смысле мы придем только ходом мысли, аналогичным тому, который прежде привел нас к понятиям коллектива и вероятности. Нужно постулировать то свойство, ту сторону явления, которая для проведения теории наиболее полезна и дает лучший результат, как существенный признак понятия. Итак, мы говорим,—оставляя за собой право небольшого добавления, которое еще последует: данный коллектив мы будем называть независимым от другого коллектива, если любое «выкидывание» из первого коллектива при помощи какого-либо признака второго коллектива оставляет неизменными предельные значения относительных частот в первом коллективе, т. е. его распределение. Если мы теперь сделаем предпосылку, что наши две игры с костями независимы между собою, то мы можем сразу разрешить задачу, поставленную в начале исследования, а именно найти вероятность выпадения пары чисел «3,5».

Вывод правила умножения

Мы рассматривали n бросаний двумя костями, среди которых n_3 дали число очков 3 на первой кости, а из них n_5 — число очков 5 на второй кости. Таким образом отношение $n_5 : n$ является относительной частотой признака (3,5) для нашей пары костей. Мы ищем предельного значения этой дроби $n_5 : n$. Но каждый, кто знаком с основаниями арифметики, знает что

$$n_5 : n = \frac{n_5}{n_3} \cdot \frac{n_3}{n},$$

т. е. относительная частота $n_5 : n$ есть произведение двух прежде рассмотренных частот $n_5 : n_3$ и $n_3 : n$. Последняя

из них имеет предельным значением вероятность получить 3 при бросании первой кости, которую мы назовем v_3; первая же, в силу допущения независимости обоих коллективов, должна иметь предельным значением вероятность получения 5 на второй кости. Эту вероятность мы обозначаем через w_5. В силу этого, предел дроби $n_5 : n$ есть произведение чисел v_3 и w_5, или: вероятность того, чтобы получить на первой кости число очков «3» и, одновременно, на второй кости «5», равна произведению вероятностей этих двух отдельных событий $w_{3,5} = v_3 \cdot w_5$. Конечно, эта теория действительна и для каждой другой пары, образованной из чисел от 1 до 6. Например, вероятность получить 5 на первой кости, и к тому же 3 на второй, равна $w_{5,3} = v_5 \cdot w_3$, где v_5 означает вероятность признака 5 в пределах первого из данных коллективов, и т. д.

Для того чтобы формулировать теорему умножения при связывании независимых коллективов в рамках нашей общей теории, необходимо еще одно добавление. Мы должны убедиться в том, удовлетворяет ли новая последовательность элементов, состоящая из бросаний двух костей и имеющая своим признаком те два числа очков, которые при этом выпадают, тем требованиям, какие мы условились предъявлять к коллективу. Иначе ведь мы не имеем права говорить о вероятности пары чисел (3,5). Первое требование, существование предельных значений, выполнено наверняка, потому что мы ведь прямо показали, как вычисляется $w_{3,5}$ и всякая другая из этих 36 величин. Остается только вопрос о нечувствительности предельных значений по отношению к произвольному выбору нумеров. И тут приходится сказать, что мы действительно должны определить условия

«независимости» еще несколько точнее, чем это было сделано выше. Нужно определенно выставить требование, чтобы предельное значение частоты для второго коллектива оставалось неизменным, если в первом предварительно будет произведен любой выбор нумеров, и сокращенная таким образом последовательность будет затем использована для процесса «выкидывания». Впоследствии один пример сразу покажет нам, что это действительно необходимо. Пока же мы даем следующую окончательную формулировку для связывания независимых коллективов:

Коллектив *A* называется независимым от коллектива *B* (с которым он состоит во взаимно однозначном соответствии), если распределение коллектива *B* остается неизменным каждый раз, когда из элементов коллектива *B* выделяется частичная последовательность таким образом, что сперва производится какой-либо выбор нумеров в коллективе *A*, затем эта выделенная последовательность элементов коллектива *A* употребляется для «выкидывания» из коллектива *B* новой последовательности, над которой наконец снова предпринимается выбор нумеров. Из двух независимых коллективов может быть создан новый путем «связывания», элементы и признаки которого суть соединения элементов и признаков первоначальных коллективов. Новое распределение получается в результате перемножения вероятностей отдельных признаков в пределах данных коллективов.

Установление независимости

Этими положениями определено четвертое, последнее для наших целей действие, служащее образованию но-

вого коллектива из данных. Правда можно, как и прежде, при определении вероятности, спросить: откуда можно узнать, что два данных коллектива в этом смысле независимы друг от друга, и, что, следовательно, мы в праве применять теорему умножения? Ответ на это гласит: здесь дело обстоит точно так же, как и в прежних случаях, и как в каждой проблеме точного естествознания, где на основе идеализированных предпосылок выводятся заключения, которые могут быть проверены только на опыте. Таким же образом механика определяет упругое тело как такое, у которого напряжение и деформация в каждой точке определяют друг друга однозначно; дальше она учит, как можно вычислить прогиб балки из упругого материала, зная величину и распределение нагрузки. Откуда известно, что такая-то определенная балка упруга в том смысле, как сказано в определении? Разве можно, например, упомянутое в определении свойство проверить в каждой точке материала? Нет, применяют результаты вычисления, проверяют их на опыте и, в случае удачи, считают сделанное допущение доказанным для испытуемого случая и других, аналогичных ему. Вот еще более простой пример: геометрия учит нас многим свойствам шара; откуда мы знаем, что эти свойства могут быть применимы к земному шару? Проверял ли кто-нибудь, что действительно существует точка, от которой все точки земной поверхности находятся на равном расстоянии? Этого ведь требует определение шара. Нет, сперва было только интуитивное предположение, что земля есть шар; потом это предположение было подтверждено проверкой всевозможных вытекающих из него следствий, и в конце концов небольшие невязки показали, что принять для

земли форму шара можно только с ограниченной точностью. Совсем так же дело обстоит при установлении независимости двух коллективов. Если две кости связаны между собою короткой ниткой, то никто не будет считать их бросания независимыми. Если нитка несколько длиннее, то все зависит от опыта. Если же кости никак не связаны друг с другом, то давнишний и весьма распространенный опыт показывает, что вероятности различных пар чисел очков следуют теореме умножения. Если же наконец играют одновременно двумя костями так, что эти кости бросаются разными лицами, по возможности даже в отдаленных друг от друга местах, то на допущении независимости настаивает уже инстинктивное чувство, т. е. еще более всеобщий, сверхличный опыт.

Связывание зависимых коллективов

Можно, как я теперь в заключение хочу коротко показать, распространить действие «связывания» еще на некоторые случаи, в которых предпосылки «независимости» осуществляются не вполне. Не следует только думать, что два связываемых коллектива A и B не должны подчиняться никаким условиям; ограничения здесь только несколько уменьшены. Мы назовем два коллектива A и B «связуемыми», но «зависимыми» при наличности следующего положения вещей. Если из элементов коллектива A делается произвольный выбор нумеров и выбранная последовательность используется для «выкидывания» из B, то возникающая при этом частичная последовательность элементов коллектива B должна образовать коллектив (распределение которого еще зависит от признака коллектива A, по которому было произведено «выкидывание»). Следовательно, должна существовать

определенная вероятность получить на второй кости «5», когда первая показывает «3», но она не должна обязательно совпадать с вероятностью получить «5» на второй кости при условии, что первая показывает «4». Практическим примером может служить следующий: В урне находятся три черных и три белых шара; два раза подряд вынимают по одному шару, при этом шар, вынутый в первую очередь, не возвращается обратно перед тем, как вынимается второй. Только после того, как вынуты оба, их кладут обратно и начинают сначала. Здесь первый коллектив состоит из «первых» шаров, которые вынимаются из полной урны. Согласно общепринятому в данном случае равномерному распределению, вероятность вынуть черный (или белый) шар равна $^1/_2$. Второй коллектив имеет элементами совокупность «вторых» шаров, которые вынимаются из урны, содержащей только пять шаров. Из всей этой последней совокупности можно при помощи первого коллектива «выкинуть» две частичных последовательности; во-первых, рассматривая все те «вторые» шары, которые следуют за «первым» белым и во-вторых, те, которым предшествует черный «первый» шар. Можно сразу заметить, что вероятность вынуть черный шар в пределах первого «выкинутого» коллектива равна $^3/_5$, в пределах же второго только $^2/_5$; потому что из пяти шаров в урне в первом случае три, во втором же только два черных. Здесь, как мы это отметили выше, распределение «выкинутых» коллективов зависит от признака, по которому было произведено «выкидывание».

Как найти в случае только «связуемых», но не зависимых коллективов окончательное распределение производного коллектива, вряд ли требует объяснения после

вышесказанного. Для того чтобы получить, например, вероятность событий «первый черный, второй белый», следует перемножить между собою следующие два множителя: вероятность $^1/_2$ вынуть черный «первый» шар и вероятность вынуть белый «второй» шар при той предпосылке, что первый шар был черным,—следовательно $^3/_5$. Результат: $^1/_2 \cdot {}^3/_5 = {}^3/_{10}$. Аналогично для любой другой комбинации.

Пример несвязуемых коллективов

Наконец будет не лишним указать пример двух коллективов, которые ни в качестве «зависимых», ни в качестве «независимых» не способны к связыванию, которые в нашем смысле несвязуемы. Пусть, например, ежедневно в 8 часов утра измеряется известная метеорологическая величена, скажем, влажность воздуха: пусть результат измерения выражается целым числом, лежащим между 1 и 6; он образует собой признак единичного опыта. Та же самая или другая переменная измеряется, тоже ежедневно, в 8 часов вечера, так что мы имеем две последовательности, находящиеся во взаимно однозначном соответствии, причем обе могут обладать свойствами коллектива. Может далее случится так, что второй коллектив нечувствителен по отношению к «выкидыванию» с помощью первого, т. е. что вечерние измерения, которые, например, следуют за утренним значением «3», обнаруживают то же распределение, как и все измеренные вечером значения. Вместе с тем, могло бы быть, что каждый 28-й день, и только в этот день (полнолуние) утреннее значение 3, если только таковое имеется, с необходимостью влечет за собою вечернее наблюдение 3. В этом случае операция связывания не дала бы никакого коллектива, потому что выбор нуме-

ров, выделяющий каждый 28-й день, дал бы в результате распределение, при котором возможность комбинаций 3,1; 3,2; 3,4; 3,5 и 3,6 была бы равна нулю, в то время как этого могло и не быть в пределах совокупности всех утренних и вечерних наблюдений. Мы видим, что здесь отдельные ряды наблюдений приняты, как случайные, в то время как в их взаимоотношении, в их связи между собою существует закономерность, которая не подчиняется понятию коллектива. По этим причинам мы называем такие две данные последовательности наблюдений «несвязуемыми в коллектив».

Пример показывает нам, насколько недостаточна и ненадежна обычная примитивная форма теоремы умножения, которая совсем не допускает различия между отдельными, по существу различными случаями взаимоотношения между коллективами.

Только рациональное понятие вероятности, построенное на точном анализе последовательностей наблюдений, названных нами коллективами, может тут привести к безупречным формулировкам.

КРИТИКА ОСНОВОПОЛОЖЕНИЙ

После перечисления и описания четырех основных операций: выбора, смешивания, разделения и связывания, построение основ исчисления вероятностей закончено. Если бы моей задачей было развить полную теорию, то я теперь должен был бы показать, как постепенным комбинированием этих четырех простых действий создаются действия все более сложные, и как, с другой стороны, все вопросы, которые обычно рассматриваются в исчислении вероятностей, сводятся к

такого рода составным операциям. Однако как бы ни было полезно для лучшего понимания изложенного дать по крайней мере несколько примеров в этом направлении, я воздержусь пока от этого искушения. Я хочу, как я об этом уже говорил, сперва сообщить несколько подробнее о возражениях, которые могут возникнуть против моей теории, и о том месте, какое они занимают в основных идеях обширной трехсотлетней литературы по исчислению вероятностей.

Объем области практической применимости

В связи с тем, что мною во вступлении сказано об отношении между образованием слов и понятий, я могу легко отвести одно возражение, возникшее против «теории частот». Возражение это, само по себе уже не новое, в последнее время упорно повторяется очень известным в другой области писателем, англичанином Дж. М. Кейнсом. В связи с критикой упомянутого уже мною Дж. Венна, который в своей «Logic of chance» развивает приблизительно то, что содержится в моем «первом требовании» к коллективу, Кейнс ставит ему в упрек, что не все то, что в обычном словоупотреблении называется «вероятным», охватывается «частотным» определением этого понятия. По его мнению, именно те случаи, к которым определение не применимо,— самые важные, и если мы не примем их во внимание, то вероятность «не будет путеводителем жизни» и мы неразумно поступим, подчиняясь ее руководству. К упреку, который заключается в последних словах, следовало бы отнестись серьезно, если бы он был справедлив. Потому что наукой, которая не оправдывается в жизни, мы наверно не стали бы зани-

маться. Но, с другой стороны, мы не стали бы заниматься и такой наукой, которая притязает на значение, выходящее за ее пределы, значение, которого она не может иметь. Теория вероятностей, в таком виде, как я ее только что наметил в ее основоположениях, имеет притязание быть надежным «путеводителем жизни» в трех больших областях. Во-первых, она учит, как следует вести себя по отношению к азартным играм; как рассчитывать ставки и выигрыши, если хочешь достигнуть известного результата при продолжительной игре. В то же время она убедительнейшим образом учит, что о результате отдельной партии ничего, ровно ничего не может быть высказано, и что измышление сколь угодно хитроумной «системы» так же бесцельно, как попытка построения perpetuum mobile. Во-вторых, теория оправдывает себя в области страхования, где она дает возможность рассчитывать премии и премиальные резервы таким образом, чтобы они удовлетворяли простейшим требованиям справедливости и гарантировали достаточную прочность предприятия. Методологически сюда также следует отнести различные применения методов теории вероятностей к всевозможного рода статистическим рядам наблюдений, включая так называемую теорию ошибок. В-третьих, рациональное исчисление вероятностей достигло больших результатов в тесной связи с некоторыми идеями теоретической физики. Эти результаты несомненно имеют значение и для материальной жизни человечества, не говоря уже об их принципиальном значении для расширения наших познаний. Ко всему этому мы впоследствии еще вернемся. Но теперь я спрашиваю, что еще можно сделать сверх приведенного здесь, если

принять более широкое определение вероятности? Если понимать ее не только как частоту в пределах точно отграниченных массовых явлений, но, как это принято в разговорной речи, считать ее «степенью правдоподобия» некоторого суждения или некоторой гипотезы? Книга Кейнса, правда, содержит главу, озаглавленную: «Применение учения о вероятностях к жизненному поведению», но я не мог найти там даже следа какого-либо практического указания, подобного одному из тех многих конкретных предписаний, какие можно найти в каждой из названных выше областей. Дело обстоит, очевидно, так: если кто-нибудь, например, хочет вступить в брак и по возможности научно определить, «вероятно» ли, что этот брак будет счастливым, то тут ему может быть придет на помощь психология, физиология, евгеника или учение о расах, но никак не «наука», так или иначе имеющая дело с тем, что заключено в слове «вероятность».

Я безусловно оспариваю, чтобы при таком способе рассмотрения могло выйти что-либо практически пригодное. Если кто-нибудь, в порядке философской любознательности, все же пожелает этим заняться, то разумеется никто не помешает ему делать это: пусть он только не хвалится результатами, которых у него нет; По крайней мере до сих пор все успехи вероятностных исследований были достигнуты при помощи рационализированного понятия вероятности. Там, где это понятие неприменимо, теория оказывается бессильной.

Роль философов

Гораздо серьезнее, гораздо труднее, но вместе с тем и значительно богаче своими возможностями представляется мне дискуссия с теми представителями теории

вероятностей, которые так называемое классическое определение вероятности предпочитают теории частот, построенной на понятии коллектива. Это будет, в известном смысле, спор математиков между собою, в основе которого, как я думаю, лежит больше различие предпочитаемой формы изложения, чем предметное расхождение мнений. Только благодаря тому, что по вопросу основоположений теории вероятностей имеется большая литература философского направления, виды на быстрое соглашение несколько осложняются. Ибо философия обладает привычкой, как только те или иные результаты точных наук кажутся твердо установленными, преувеличивать их, расширять область их применения больше, чем к тому есть основание и, опираясь на всевозможные доводы, приписывать им вечную значимость. Так, благонамеренные попытки многих философов упрочить основоположения естественных наук часто фактически имеют обратное действие на ход развития науки; вместо того, чтобы его стимулировать, они, напротив, тормозят его; вспомните только о том, как Кант возвел Евклидову геометрию в догмат, и какие затруднения для теории относительности возникли как раз благодаря этому. Задним числом философия обычно затем примиряется с новыми учениями, как мы это в настоящее время видим на различных философских «обоснованиях» теории Эйнштейна. Кажется, что философы всегда становятся на сторону сильного — это может быть единственное, что делает их богоподобными. Молодая ветвь положительной науки всегда должна собственными силами пробивать себе дорогу; как только она окрепнет, философы оказывают ей помощь против ее наследников.

После того, как великий математик Лаплас построил научное здание теории вероятностей на понятии так называемой «равновозможности», почти ни один философ не обошелся без аргументов в пользу этого воззрения. Еще более удивительна та развязность, с которой некоторые философы вступают на арену традиционных воззрений. Так, например Э. Гартман, несмотря на то, что он в другом месте жестоко критикует термин «равновозможность», во введении к своей «философии бессознательного» при помощи математических формул вычисляет вероятность того, что явления природы могут быть приписаны духовным причинам! Авторитет Лапласа был настолько силен, что философ Фехнер, создавший плодотворное понятие «коллективного предмета», не осмелился построить теорию вероятностей на этой основе, а поставил свою «Kollektivmasslehre» лишь наряду с теорией вероятностей.

Классическое определение вероятности

«Классическое» определение вероятности в его стереотипной форме, в которой его приводят почти все без исключения учебники исчисления вероятностей, было высказано Лапласом следующим образом: **вероятность есть частное отделения числа благоприятых событию случаев на общее число всех равновозможных случаев.** Чтобы быть справедливым, следует тут же признать, что многим математикам вполне ясна недостаточность этого определения. Пуанкаре, например, предпосылает ему такое введение: «Вряд ли можно дать удовлетворительное определение вероятности; обычно говорится, и

т. д.». Мы впоследствии увидим, что полное и последовательное проведение теории, в которой за основу было бы взято классическое определение, никогда не было предпринято. Обычно начинают с определения, основанного на «равновозможности», а затем в подходящий момент забывают о принятом толковании понятий и соскальзывают к определению (иной раз даже явно формулируемому), основанному на частотах. Потому-то я и думаю, что противоположность воззрений не так уже непримирима. Для большинства математиков дело будет касаться, собственно, только отказа от более или менее излюбленной формы изложения, которая давала возможность в начале изучения удобно справиться с несколькими простыми задачами, не вдаваясь сразу в более трудные и глубокие вопросы.

Главное возражение против определения Лапласа должно, конечно, быть направлено на употребленное в нем выражение «равновозможные случаи». Обычное словоупотребление знает различные градации возможности или реализуемости. Явление называют или возможным, или невозможным; оно может также называться «легко возможным» или «едва ли возможным», если что-нибудь известно о тех усилиях, которых требует его реализация. «Едва ли возможно» для армейского корпуса промаршировать в один день 15 *км*, и вовсе невозможно, чтобы он прошел 30 *км*, хоть «легко возможно», что отдельный человек пройдет в день 15 *км*, и «не так уж невозможно», что он может пройти 30 *км*. В этом смысле два явления называют равновозможными, если их выполнение требует одинаковых усилий, одинаковой затраты труда; но не это, во всяком случае, Лаплас имеет в виду в своем

определении: в совсем ином смысле о событии говорят, что оно, «более возможно», чем некоторое другое событие, желая этим выразить известное предположение, касающееся его шансов на осуществление. Нет никакого сомнения, что ту равновозможность, о которой говорится в классическом определении вероятностей, следует понимать в таком именно смысле и что оно поэтому не означает ничего иного, как одинаково правомерное допущение, т. е. одинаковую вероятность, как ее понимает разговорный язык. Выражение «равновозможные случаи» вполне равнозначно с выражением «равновероятные случаи», и большего, чем этот простой факт, не может раскрыть даже такой толстый том «о возможности и вероятности», какой был написан А. Мейнонгом. Классическое определение, если только оно не желает впадать в ложный круг, становится просто сведением распределений более общих к простейшему случаю равномерного распределения.

Равновозможные случаи...

Посмотрим теперь, каким образом на деле происходит редукция. Для правильной кости существует шесть равновозможных случаев, один из них дает число очков три; следовательно, вероятность выпадения тройки составляет $^1/_6$. Если лотерейное колесо содержит билеты с нумерами от 1 до 90, то мы имеем 90 равновозможных случаев; 9 из этих 90 случаев соответствуют однозначным нумерам, 9 других таким двузначным, которые делятся на 10, остальные 72 — двузначным, не делящимся на 10. Следовательно, вероятности однозначного или делящегося на 10 числа равны каждая $^9/_{90} = ^1/_{10}$, вероятность же всех остальных лотерейных

нумеров вместе составляет $^{8}/_{10}$. Третий пример: при игре с двумя правильными костями каждая из 36 комбинаций чисел есть один из равновозможных случаев; отсюда вероятность получить двойную шестерку равна $^{1}/_{36}$, вероятность получить сумму очков 11 равняется $^{1}/_{18}$, потому что здесь налицо два благоприятных случая, именно число очков 5 на первой кости и 6 на второй и наоборот.

По поводу этих трех применений определения, основанного на равновозможности, надо сказать следующее.

Первое из них есть чистая тавтология, если принять во внимание, что равновозможность и равновероятность означают одно и то же; кроме этого здесь использован только тот факт, что сумма вероятностей всех возможных результатов опыта равняется 1. Во втором примере, в котором соединяется несколько «благоприятных» случаев, мы имеем просто очень частый случай смешивания коллективов, о котором я прежде уже упоминал; признаки от 1 до 9, затем признаки 10, 20, 30... 90, и наконец все остальные, соединяясь соответственно между собою, дают три новых признака, и сложение отдельных вероятностей, из которых каждая здесь равна $^{1}/_{90}$, дает вышеприведенный результат. В третьем примере, который касается игры с двумя костями, классическая теория применяет теорему, которой, также в весьма частном случае, подчиняется связывание независимых коллективов и которая гласит: каждая комбинация, состоящая из одного из равновозможных случаев первого коллектива и аналогичного случая второго коллектива, дает один из равновозможных случаев нового, производного коллектива. Так как при помощи смешивания

и связывания, как мы уже знаем, строится большинство важнейших задач исчисления вероятностей, то таким образом в рамках теории равновозможности удается в существенных чертах разрешить все те задачи, в которых заданные распределения первоначальных коллективов р а н о м е р н ы. Обычно это бывает в задачах с азартными играми, правильными костями и т. п.

... *не всегда бывают налицо*

Но что же делать в случае «неправильной» кости с помощью теории, которая с самого начала признает существование вероятностей только внутри некоторой области равновероятных между собой возможностей?

Можно сказать наверняка, что если мы хоть чуть-чуть подточим правильную кость, то равновероятность ее шести граней исчезнет. Разве теперь больше не существует вероятности для выпадения тройки? Разве теперь нельзя больше утверждать, что вероятность выпадения четного числа очков есть сумма вероятностей чисел 2, 4 и 6? Формулировка классического определения, во всяком случае, не допускает больше применения выведенных нами выше теорем, ибо, согласно этому определению, просто не существует вероятности там, где нет равновозможных случаев. Учебники классической теории не дают никакого ответа на эти вопросы: как я уже говорил, они вообще не рассматривают «неправильную» кость, как достойную внимания задачу исчисления вероятностей. Ну, об этом, в конце концов, нельзя спорить. Но существуют другие вопросы такого же рода, о которых нельзя умолчать и с которыми дело обстоит отнюдь не лучше, чем с неправильной костью. Например, вопрос о вероятности смертного

случая. Если таблица указывает 0,011, как вероятность того, что сорокалетний мужчина умрет в течение года, то где здесь равновозможные и благоприятные случаи? Имеем ли мы 1 000 возможностей, из которых 11 благоприятны наступлению смерти, или 3 000 с 33 благоприятными случаями? Ответа на это, или хотя бы указания на то, что́ здесь следует разуметь под возможными случаями, вы будете напрасно искать в учебниках. Дело в том, что когда они доходят до того места, где речь идет о вероятности смерти и тому подобном, то они уже давно забыли, что все правила и предложения этой теории были выведены на основе определения, которое признает в качестве исходной точки одно только равномерное распределение. Без всякого смущения теперь утверждается, что можно определять вероятности, неизвестные нам «a priori»,—эмпирически или «a posteriori», устанавливая в достаточно длинной последовательности наблюдений относительные частоты различных событий. И с величайшей смелостью выведенные совсем с другой точки зрения теоремы распространяются на эти новые вероятности. В лучшем случае ссылаются при этом на так называемую теорему Бернулли или закон больших чисел, который будто бы образует мост между априорным и эмпирическим определением вероятности. Я впоследствии подробно покажу, что это совсем не верно, что здесь перед нами самый типичный ложный круг. Но, как бы то ни было, мы уже теперь можем установить, что никогда не обходятся и никогда и нельзя обойтись без истолкования вероятности, как предельного значения относительных частот, если только не хотят исключить как раз практически наиболее зна-

чительные случаи ее применения. Какой же может иметь смысл — держаться в начале за определение, которое все равно слишком узко для того, чтобы охватить все нужные случаи, и разве только с большой натяжкой находит себе применение к целому ряду важнейших задач? Простая аналогия из области элементарной планиметрии сделает нам положение вещей более наглядным.

Геометрическая аналогия

Можно было бы поставить себе задачу построить на плоскости геометрию прямолинейно ограниченных фигур таким образом, чтобы рассматривать одни только равносторонние многоугольники, и притом еще только такие, у которых длины всех сторон имеют одну и ту же определенную величину. В этой геометрии нет измерения длин; каждая фигура вполне определяется своими углами и числом сторон. Если затем когда-нибудь придется иметь дело с трехугольником, стороны которого по обычному представлению соответственно равны 3, 4 и 5 единицам принятого масштаба, то этот трехугольник придется объявить равносторонним двенадцатиугольником, у которого сперва три стороны лежат под углами в 180° друг к другу, потом следующие четыре и наконец последние пять. Пока длины сторон являются целыми кратными единицы масштаба (а при достаточно малой единице можно считать таковым любой отрезок), это сведение к равносторонним многоугольникам не представляет существенных затруднений. Тут мы также приходим к различию между многоугольниками, число сторон которых дано «a priori» (потому что все соседние стороны в них образуют углы, от-

личные от 180°), и такими, которые мы только «апостериорным» путем измерения длин их сторон более или менее точно можем причислить к классу равносторонних многоугольников. Проведение подобной теории несомненно возможно, но ни один разумный человек не будет утверждать, что таким путем может быть изгнано из геометрии понятие длины отрезка или измерение длин; это будет только обходный путь. Точно так же дело обстоит с теорией вероятностей, основанной на «равновозможности». Исторически понятно, что теория вероятностей начала с равновозможных случаев, аналогичных равносторонним многоугольникам, так как ведь вопросы азартных игр были ее первыми задачами. Но если в настоящее время вероятность жизни или смерти, которая фактически получена как относительная частота, задним числом стараются определить при помощи сведения к чисто гипотетическим «равновозможным» случаям, то это просто игра в прятки с необходимостью дать более широкое определение вероятности, которое здесь в конце концов так же неизбежно, как понятие измерения или сравнения длин в геометрии.

Обнаружение равновозможности

Я думаю, что выяснил теперь, как в общих чертах мое определение вероятности относится к обычно предпочитаемому способу изложения. Когда со временем задачи азартных игр, унаследованные нами в историческом порядке, еще больше отступят на второй план перед вопросами более важными, связанными со страхованием, статистикой и теорией ошибок, тогда, я думаю, все естественно обратятся к такому построению исчисления вероятностей, которое единственно удовлетворяет тре-

бованиям простоты и разумности. Но со всем тем, что так называемая теория познания выдвинула в качестве аргументов для обоснования и углубления классического исчисленя вероятностей,— новое воззрение, сторонником которого я являюсь, никак не соединимо. Дело в том, что представителям теории познания основоположным вопросом казалось то, что вообще не является проблемою, если только ввести значение определения, основанного на равновозможности, в его настоящие рамки. Они вновь и вновь исследовали вопрос о том, откуда мы знаем, что шесть граней игральной кости или 90 нумеров в маленьком лото и т. д. суть равновозможные случаи? Мой ответ на это гласит: в общем случае, т. е. для любой кости, для любой лотерейной урны, мы этого вообще не знаем; знаем же мы это исключительно для определенной, испытанной достаточно длительным наблюдением серии экспериментов и, конечно, для каждой другой, построенной в точности по тому же образцу. Из двух пар костей, которые я вам прежде демонстрировал и которые внешне выглядят совершенно одинаково, поведение одной в основе противоречит предположению о том, что все шесть граней обладают равной вероятностью. Разница между правильной и неправильной костью в данном случае, вероятно, может быть установлена простым взвешиванием в руке или путем простого механического опыта. Возможно ли что-нибудь подобное также и при более тонких неправильностях, не является ли иногда статистический опыт единственным путем к выяснению вопроса,— этого мы пока не будем касаться. Прежде чем говорить об этом, мы немного займемся теми источниками, из которых философы чер-

пают свои проблемы; все здесь вращается, как вы, наверно, уже заметили, вокруг понимания вероятности, как некоего познания «a priori».

Вероятность «a priori»

Если из совершенно однородного материала построить тело, которое геометрически совершенно точно имеет форму куба, то считают «a priori» очевидным, что ни одна из его граней не имеет преимущества перед другой и, следовательно, выпадение всех шести граней одинаково возможно, т. е. одинаково вероятно. Я готов это временно допустить, несмотря на большие затруднения, происходящие отсюда, потому что дело не только в костях, но и в характере бросания, во всем явлении целиком: как берется кость, как кладется в бокал, как этот последний встряхивается и т. д. Я готов также пренебречь тем, что это утверждение только тогда приобретает смысл, т. е. вообще представляет собою некоторое познание, априорное или нет, — безразлично, когда уже известно, что̀ означает «равновероятность», т. е. когда, например, в смысле определения, основанного на частотах, это выражение означает «одинаково частое выпадение шести граней при продолжительном ряде бросаний».

Спрашивается теперь только, действительно ли здесь делается или может быть сделано теоретически необходимое, независимое от опыта заключение о вероятности некоторого явления или события? Если тщательно вдуматься в предпосылки однородности и симметрии, то очень скоро станет заметно, как мало остается от всего утверждения; гораздо меньше, во всяком случае, чем того требует самое скромное применение к конкретному случаю.

Однородным в логическом значении слова мы можем назвать материал только тогда, если ни об одной его части не может быть высказано ничего специфического, если все части его, следовательно, имеют одинаковую историю. Но если наш куб, напр., выточен из слоновой кости, то какая-либо его часть несомненно помещалась в клыке слона ближе к его концу, чем другая. Теперь уже нет необходимости мыслить, что обе части ведут себя совершенно одинаково. Знание это теперь основывается на опытном предложении, что исходное положение материала в теле животного не имеет никакого влияния на течение опыта с костями. На деле мы пользуемся в каждом отдельном случае опытными данными, идущими много дальше. Мы, например, отмечаем шесть граней нашей кости различными цифрами и допускаем, что это не оказывает никакого влияния, в то время как первобытные, т. е. просто значительно менее опытные племена, убеждены в возможности изменения жизненной судьбы человека, тело которого исписано подобными знаками. Мы не ограничиваемся одним писанием цифр, мы делаем от одной до шести зарубок на поверхности кости и сильно изменяем этим геометрическую симметрию, и все это на основании опыта, показывающего, что это не играет никакой роли. Если заставить сторонника априорного взгляда дать точное определение того, что он собственно разумеет под совершенной однородностью, то он, в конце концов, ограничится требованием, чтобы центр тяжести тела совпадал с геометрическим центром и — если вопрошаемый достаточно знает механику — чтобы моменты инерции куба относительно его двенадцати ребер, принимаемых за оси, были равны между

собою. Никто не назовет больше очевидным a priori тот факт, что именно эти условия (а не другие, опирающиеся, напр., на моменты высших порядков) для «равновозможности» шести граней кости являются необходимыми и достаточными: в этой формулировке заключается значительная часть кинетики твердого тела, построенной в конечном счете на опытных положениях. Результат наших размышлений сводится таким образом к следующему: из того, что называют равновозможным, a priori (или с теоретической необходимостью) нельзя извлечь ничего, позволяющего судить о данном конкретном случае; всегда приходится кроме того пользоваться знаниями более или менее общими, выведенными из наблюдения и опыта, которые учат, какие свойства данного процесса влияют на течение опытов и какие нет.

Все это очень похоже на известное применение принципа симметрии к выводу условий равновесия равноплечного рычага. Если обе половины рычага вполне одинаковы, то считают, что условие, в силу одних только «соображений симметрии» должно состоять в равенстве действующих сил. Но в этой форме теорема, конечно, слишком узка. Не говоря уже о том, что равенство плеч в вышеуказанном строго логическом смысле вообще недостижимо, равноплечным рычагом ведь называют такой, у которого точки приложения сил одинаково удалены от оси вращения, без требования полной симметрии в отношении геометрической формы. Очень поучительно посмотреть, как более старые учебники технической механики стараются приучить читателя к теореме о равновесии равноплечного рычага в случае отсутствия симметрии, приводя чертежи целого ряда рычагов раз-

личной формы. Закон равновесия зависит от расстояний между точками приложения и точкой опоры, и только от них; в этом состоит решающее познание, почерпнутое из наблюдений.

Особое положение равновозможности?

Если априорное познание равновозможности таким образом оказывается пустым звуком, то остается еще следующий путь, чтобы обеспечить равновозможным случаям особое положение по сравнению с другими случаями определения вероятности. Можно было бы сказать: если кость кроме симметрии геометрической обладает также (указанными выше) свойствами, совокупность которых можно назвать «кинетической симметрией», а именно, что статические моменты и моменты инерции равны для всех двенадцати ребер куба, тогда уже на основании механики твердого тела вероятность выпадения любой грани должна равняться $^1/_6$. Но если для неправильной кости точно известны все механические величины: положение центра тяжести, моменты инерции и т. д., то никак невозможно вычислить на основе механических теорем, с какой относительной частотой будет выпадать каждая сторона. Единственным средством определить вероятность тогда остается статистический опыт, в то время как в первом случае возможно предсказание, если и не априорное, то все же основанное на опытной науке определяющего характера.

Этот ход мысли, как я полагаю, содержит в себе ошибку. Я уже заметил прежде, что для течения ряда опытов, состоящего из повторного бросания костей, решающей является не одна только структура кости. Можно, очевидно, играть неправильно костью, удовлетворяю-

щей всем условиям симметрии; можно, сознательно или безсознательно, поступать «неправильно», кладя кость в бокал или встряхивая бокал перед бросанием. При этом могут быть затронуты очень тонкие психологические и чувственно-физиологические явления, как это известно из опытов над фокусниками и из новейших исследований, которые (будучи еще не достаточно ясными) причисляются к так называемой «парапсихологии». Само собой разумеется, что я не хочу здесь выступать защитником какой-нибудь «оккультной науки», но я определенно верю, что, основываясь на имеющихся эмпирических методах, непредубежденно развивая и разрабатывая данные наблюдений, мы еще дойдем до раскрытия связей, не известных нам в настоящее время. Как бы то ни было, но при современном состоянии нашего знания представляется невозможным указать «теоретически» все без остатка условия, которые обеспечили бы одинаково частое выпадение шести граней кости при достаточно долгом ряде опытов. Под «теоретическим» при этом разумеется указание, хотя и опирающееся на эмпирически обоснованную научную дисциплину, но не основанное на статистическом опыте, который был выполнен в указанном или подобном указанному порядке.

Существенную, хотя и независимую от основоположений исчисления вероятностей, в узком смысле этого слова, часть моих взглядов на статистические явления я формулирую так: Наличность равномерного распределения в пределах коллектива можно (точно так же как и наличность всякого другого распределения) установить только путем достаточно длительно повторенного опыта. Опыт может быть произведен над данным

объектом или над другим, который на основании соответствующих наблюдений считается равноценным данному. Это предложение имеет значение прежде всего для распределения исходного коллектива, которое в каждой задаче исчисления вероятностей следует предполагать данным. Во вторую очередь оно применимо и к распределению производного коллектива, если желательно проверить наблюдением результаты теоретического расчета.

Субъективное понятие вероятности

Только что изложенный взгляд на равномерное распределение, как на частный, но не обладающий принципиально особым положением пример общего распределения резко противоположен точке зрения гносеологов, защищающих так называемое субъективное понятие вероятности. Согласно их мнению, вероятность, приписываемая известному событию (или, собственно, утверждению, что это событие наступит), зависит исключительно от степени нашего знания, и допущение равновероятности различных событий есть следствие полного незнания. Я уже приводил однажды чрезвычайно характерную краткую формулировку Чубера, согласно которой «абсолютное незнание условий» ведет к допущению, что все возможные случаи одинаково вероятны. В несколько более научной форме это называется «принципом индиферентности». Очень правильно замечает Кейнс: из принципа индифферентности, собственно, следует, что каждая теорема, о правильности которой ничего не известно, обладает вероятностью $^1/_2$; потому что она ведь образует со своей контрадикторной противоположностью два равновозможных случая. Если,

например, ничего не известно о некоторой книге, то утверждение, что она красная, обладает вероятностью $^1/_2$, но той же вероятностью обладают утверждения, что она синяя, желтая или зеленая, так что сумма вероятностей может оказаться произвольно большою. Кейнс делает большие усилия, чтобы благополучно обойти подводные рифы субъективной теории, но ему это не очень удается. Он не приходит к простой мысли о том, что, не зная ничего о какой-либо вещи, нельзя также высказать ничего и о ее вероятности.

Ошибка «субъективного» воззрения на вероятность, как я полагаю, выясняется путем следующего рассуждения.

Если не знаешь ничего о росте шести человек, то можно высказать предположение, что все шестеро равновелики. Предположение может быть правильным или нет, можно его также (в смысле обычного словоупотребления) назвать более или менее вероятным. Точно так же можно предполагать о шести гранях кости, о которых ничего не известно, что они «равновозможны». Но это не больше чем предположение, и оно может быть верным или неверным, как это показывают продемонстрированные вам мною две пары костей. Здесь начинается своеобразный ход мыслей субъективистов: «я считаю случаи равновозможными», следовательно, «случаи равновозможны», потому что ведь возможность есть только нечто субъективное. Таким образом, конечно, из незнания «следует» утверждение равновероятности, но с таким же правом и всякое другое, например, что вероятности относятся между собой, как квадраты чисел от 1 до 6, потому что как предположение возможно и это.

Я думаю, что большинство людей на вопрос, где может находиться центр тяжести неизвестной кости, ответит: «вероятно, в середине». Но этот ответ основан не на незнании, а на том несомненном факте, что наверное большинство костей, сделанных до сих пор, были приблизительно правильны. Подробное психологическое исследование того, на чем основывается субъективная оценка вероятности, безусловно возможно. Оно имело бы к исчислению вероятностей такое же отношение, как исследование субъективного ощущения тепла к физической термодинамике. Исходной точкой термодинамики также является наличность тепловых ощущений, но она начинает с того, что на место субъективной оценки теплоты ставит объективную меру, допускающую сравнение, высоту ртутного столба. Общеизвестно, что температурная шкала и человеческое ощущение тепла не всегда идут параллельно, их взаимоотношение нарушается различными психологическими и физиологическими влияниями. Но этим не умаляются польза, ценность и заслуга физического учения о теплоте, и никто не думает из-за этого менять построение термодинамики. Да будет мне позволено выразиться так: повторный опыт и определение, основанное на частоте, служат термометром вероятности.

Теория Криса

И. Крис в своей известной книге привел учение о равновозможности к несколько более тонкой, но столь же мало выдерживающей критику форме. Он полагает, что в вопросах, здесь рассматриваемых, существует некоторый свободный объем [1]) для наших суж.

[1]) Spielraum (*прим. перев.*).

дений и мы обладаем естественным чувством того, как распределить этот объем таким образом, чтобы каждая часть его соответствовала одному из равновозможных случаев. Он говорит об «индиферентных объемах», о «свободном построении ожиданий» и о «принудительно определенном, лишенном произвола установлении одинаково правомерных допущений». Основанием теории является предложение, не эмпирический характер которого Крис усиленно подчеркивает: «Допущения, которые охватывают собою одинаковые и индифферентные первоначальные объемы, одинаково вероятны». По моему мнению, тут только слово «равновероятно» заменено выражением «одинаковые объемы». Определенный смысл все это получает только тогда, когда для каждого случая, к которому применяется исчисление вероятностей, указано действие, с помощью которого, хотя бы приблизительно, может быть установлено, какие объемы равновелики. Для этого же не существует никакой другой возможности, как только определение частоты в повторном опыте, и, таким образом, мы снова приходим к моей точке зрения.

Применение теории Криса следует себе мыслить примерно так: если мы, например, покупаем лотерейный билет, то этим определен общий объем нашего ожидания, состоящий в том, что один из 10 000 выданных билетов должен выиграть главный выигрыш. Этот объем мы делим на 10 000 «равных» частей и таким образом приходим к заключению, что мы, обладая одним билетом, имеем вероятность $^1/_{10000}$ выиграть главный выигрыш. Не будем спорить о том, насколько такое умозаключение является принудительным. Но совершенно бесспорно теория объемов разбивается теми примерами,

которые впервые были указаны Бертраном и которые Пуанкаре потом назвал «парадоксами Бертрана». Я хочу показать на возможно более простом примере те неопредолимые затруднения, которые при этом встают перед любой формой классической теории вероятностей, в частности и перед учением Криса об индиферентных объемах (так называемой логической теорией).

Парадоксы Бертрана

Вообразим, чтобы иметь дело с возможно более простым случаем, стакан, наполненный смесью воды и вина. О пропорции смеси пусть будет известно только то, что относительное количество воды в стакане не меньше 1 и не больше 2, т. е. воды в стакане по меньшей мере столько же, сколько вина, и по большей мере вдвое больше, чем вина. «Объем» нашего суждения о составе смеси находится, следовательно, в пределах от 1 до 2. Если больше ничего не известно, то в силу принципа индиферентности (или принципа симметрии) согласно теории объемов, как и вообще согласно всякому подобному ей взгляду на природу вероятности, следует допустить, что равновеликие частичные области данного «объема» обладают равными вероятностями. Следовательно, должно быть 50% вероятности за то, что относительное количество воды лежит между 1 и 1,5, и точно так же 50% за то, что оно падает на область от 1,5 до 2. Что мешает нам, однако, поставить на место этого рассуждения следующее:

Об отношении количеств вина и воды нам известно, что оно находится между 1 и $^1/_2$, и больше ничего. Следовательно, надо допустить, что обе половины этого «объема» обладают одинаковой вероятностью. Отсюда

мы получаем $50^0/_0$ вероятности за то, что отношение количеств воды и вина в стакане не больше, чем $^3/_4$ или, что то же самое, что обратное отношение количеств воды и вина не меньше, чем 4:3 и не больше, чем 2:1.

В первом решении половинная вероятность падала на «объем» от 1,5 до 2; согласно же второму она падает на «объем» от $^4/_3$ до 2, что создает явное противоречие.

Точно такое же противоречие можно указать во всех случаях, в которых различаемые признаки (здесь значения коэфициентов смеси) не ограничены отдельными дискретными числовыми значениями (как у кости: целые числа от 1 до 6), но заполняют непрерывную область значений (в нашем примере все числа между 1 и 2). Я уже выше кратко говорил о подобных задачах и упоминал также об употребительном для этих случаев, не очень подходящем наименовании: обычно здесь говорится о «геометрических вероятностях», потому что большинство этого рода проблем носит более или менее геометрический характер. Одной из самых старых и известных задач такого рода является, повидимому, задача об игле Бюффона (1733), которая состоит в следующем: иголка наугад бросается на пол, по которому проведены параллельные прямые на равном расстоянии друг от друга; спрашивается о вероятности попасть (пересечь) иголкой на одну из этих линий. Единичный опыт дает в результате в качестве признака — положение иголки относительно решетки прямых, которое может быть различным образом определено при помощи чисел, так называемых координат. Известным значениям координат соответствует тогда пересечение иголки с одной из прямых, т. е. положительный результат опыта, другим значениям — отрицательный. Противоречие создается точно так же,

как в нашем первом примере, тем, что положение иголки, т. е. результат единичного опыта, может быть различным образом выражено в числах. Пропорцию смеси в стакане можно было определить как посредством отношения количеств воды и вина, так и посредством обратного отношения количеств вина и воды: точно так же и здесь можно применять координаты декартовы, полярные или еще какие-либо другие. Равномерное распределение для одного отношения, и соответственно одного выбора координат, не будет равномерным для другого.

Об эту скалу неизбежно должна разбиться всякая теория, для которой исходными вероятностями служат только равномерные распределения, устанавливаемые при помощи чувств, инстинктивно, априорно или еще каким-нибудь подобным образом. Точка зрения теории частот состоит просто в том, что распределение исходных коллективов должно быть дано; откуда оно известно, каковы его качества — все это совершенно не касается исчисления вероятностей. В примере смеси воды с вином вообще вряд ли возможно разумным образом определить коллектив; нужно было бы знать конкретный процесс, с помощью которого «возникает» стакан, содержащий определенную смесь. В проблеме иглы акт проведения опыта до известной степени дан; иголка известным, подлежащим более точному описанию, способом бросается на пол; распределение этого исходного коллектива определяется «плотностью вероятности», отнесенной к каким-либо координатам. Если определить путем действительного проведения ряда опытов функцию плотности, относящуюся к любой, произвольной системе координат, то совершенно безразлично, какие избрать координаты: при дальней-

ших расчетах не может возникнуть противоречия. Самая задача относится к типу «смешивания»; объединяются, с одной стороны, те значения координат, которые дают в результате пересечение иголки с одной из прямых, и, с другой стороны, те, для которых результатом является положение иголки между двумя прямыми решетки. Может считаться, что будут выбраны такие координаты, для которых исходные вероятности образуют равномерное распределение; но для конечного результата всей задачи это не имеет никакого значения.

Якобы возможный мост между определениями, основанными на частотах и на равновозможности

Существенные возражения, которые можно сделать против классического определения вероятности, идут, как мы видели, по двум направлениям. Во-первых, это определение слишком узко, оно охватывает только часть фактически возникающих задач и исключает как раз задачи, практически наиболее важные, например касающиеся страхования жизни и т. п. Во-вторых, оно ставит равномерное распределение исходного коллектива в особое положение, которое ему не свойственно и которое оказывается особенно несостоятельным в только что рассмотренных случаях «геометрических вероятностей». Против второго возражения, насколько я вижу, ничего серьезного сказать нельзя; мне кажется, что его оставляют без внимания скорее из равнодушия, чем по каким-либо положительным причинам. Но по поводу первого каждый, кто знаком с обычным построением исчисления вероятностей, скажет, что ведь уже в рамках классической теории существует между определением, основанным на равновозможности, и определением «частотным»

«мост», который дает возможность, по крайней мере для практических целей, удовлетворительно справляться с исключенными первоначально задачами, подобными вероятностям смертных случаев, и т. п. Этот мост, по указаниям всех современных учебников, строится при помощи ссылок на так называемый «закон больших чисел», обоснованный Бернулли и Пуассоном. С помощью некоторой математически доказуемой теоремы можно якобы показать, что вероятности, первоначально определяемые, как отношения чисел благоприятных исходов к числу всех возможных исходов, могут затем быть вновь обретены в виде относительных частот, в достаточно длинном ряду экспериментов. Хотя некоторые критики, например вышеупомянутый Крис, уже указывали на опасные слабости этого «построения моста», но тем не менее им продолжают пользоваться за неимением лучшего. Поэтому нам теперь придется более подробно остановиться на этом предмете и тем самым снова обратиться к более математическому способу рассмотрения. Я могу при этом обещать, что тут не потребуется каких-либо специальных математических знаний, выходящих за пределы самых элементарных арифметических операций. Цель, к которой я стремлюсь, это — показать, что даже столь глубокое, столь необходимое во всех прикладных вопросах предложение, как закон больших чисел, не избавляет нас от необходимости во всех случаях определять вероятность как предельное значение относительной частоты. Более того, теорема, установленная Бернулли и Пуассоном, теряет, самую, существенную часть своего содержания, теряет собственно даже весь свой смысл, если мы с самого начала не примем этого определения. Только скрытые

неточности, заключения, содержащие ложный круг, и т. п., могут приписывать этой теореме роль связующего моста между определениями, основанными на равновозможности и на частотах.

На ряду с теоремой Бернулли—Пуассона мы тут же рассмотрим и другую теорему, которую часто называют обратной по отношению к первой и которая служит тем же целям.

✓ ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Среди многих трудных вопросов, связанных с рациональным обоснованием теории вероятностей, нет, поистине, ни одного, в котором господствовала бы такая путаница, как в вопросе о содержании и значении «закона больших чисел» и его отношении к «частотной» теории вероятностей. Большинство авторов колеблется между следующими двумя утверждениями: определение вероятности события как предела относительной частоты, 1) уже предполагает закон Пуассона и 2) противоречит ему. Но ни одно из этих утверждений не соответствует действительности.

Две различные формулировки, данные Пуассоном

Основная причина путаницы заложена у самого Пуассона, который, как уже было указано, в различных местах своего основного сочинения (1836) обозначает одним и тем же термином два совершенно различных утверждения и, повидимому, считает их и фактически равнозначными. Во введении к книге он совершенно определенно высказывается в одном направлении: «Явления самого различного характера подчинены общему закону,

который можно назвать «законом больших чисел». Он состоит в том, что когда наблюдают в очень большом числе однородные события, которые зависят от причин постоянных, и таких, изменения которых происходят без всякой закономерности в ту и другую сторону, не имея тенденции двигаться в каком-либо определенном направлении, то между этими числами устанавливаются почти неизменные отношения. Для каждого рода явлений эти отношения имеют свои особые значения, к которым они приближаются тем более, чем длиннее ряд наблюдаемых явлений, и которых они бы в точности достигли, если бы возможно было продлить ряд наблюдений до бесконечности». Из этих слов и примыкающего к ним изложения совершенно недвусмысленно следует, что здесь под «законом больших чисел» разумеется некоторый факт, почерпнутый из наблюдения или опыта. Числа, об отношениях которых здесь говорится, очевидно, суть числа наступлений отдельных событий или различных возможных исходов опыта. Если событие при n опытах наступает m раз, то мы называем отношение $m : n$ «относительной частотой» его наступления. Поэтому содержание закона, изложенного Пуассоном в его введении, совершенно равнозначно с тем, что я прежде формулировал как «первое требование», предъявляемое к коллективу: относительная частота, с которой наступает какое-либо событие, приближается, при безграничном продолжении опытов, к некоторому постоянному значению. Если бы под «законом больших чисел» всегда разумели то, что Пуассон назвал этим именем в своем введении, то было бы совершенно правильно сказать: этот закон выражает опытное основоположение, на которое должно опираться оп-

ределение вероятности, как предельного значения относительной частоты.

Однако значительная часть сочинения Пуассона посвящена выводу и обсуждению определенной математической теоремы, которую сам Пуассон снова называет «законом больших чисел» и которая в настоящее время цитируется под этим именем, а иногда и просто под именем «закона Пуассона». Эта теорема является известным обобщением теоремы, установленной еще Яковом Бернулли (1713), которую мы можем выразить следующими словами: если простой альтернативный опыт, положительный результат которого обладает вероятностью p, повторить n раз, и через ϵ обозначить произвольно малое число, то вероятность того, что по меньшей мере $pn - \epsilon n$ раз и не больше чем $pn + \epsilon n$ раз выпадет положительный результат, с возрастанием числа n стремится к единице. Конкретнее: если 100 раз бросить монету, играя в орлянку, то существует известная вероятность того, что при этом герб выпадет от 49 до 51 раза; если бросать 1 000 раз, то вероятность выпадения герба от 490 до 510 раз будет уже больше: еще ближе к единице вероятность при 10 000 опытах получить число гербов, лежащее между 4 900 и 5 100, и т. д. В данном случае, очевидно, $p = {}^1/_2$ и $\epsilon = {}^1/_{100}$.

Расширение теоремы, данное Пуассоном, сводится только к тому, что ряд опытов проделывается не обязательно с одной монетой, и даже не обязательно с одинаковыми монетами; можно каждый раз брать другую монету; только эти монеты в своей совокупности должны обладать тем свойством, чтобы среднее арифметическое из n вероятностей имело значение p, т. е. в нашем слу-

чае $^1/_2$. Еще более общая концепция теоремы, особенно просто доказанная Чебышевым, относится к случаю, когда простая альтернатива (случай орлянки) заменяется опытом с бо́льшим числом возможных исходов. Для нашего принципиального исследования вполне достаточно рассмотреть ту простейшую форму, с которой мы встречаемся при обычной игре в орлянку. Мы спрашиваем: как содержание доказанной математической теоремы, которую мы для краткости будем называть просто «теоремой Пуассона», связано с тем опытным фактом, который Пуассон делает отправным пунктом своих исследований? Можно ли действительно утверждать, что этот факт находит себе выражение в этой теореме или что, вообще, здесь выведено при помощи теоретических рассуждений нечто такое, что может быть проверено и подтверждено наблюдением?

Точка зрения определения, основанного на равновозможности

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо исходить из того, что́ Бернулли и его последователи разумеют под именем вероятности. Если мы в формулировку теоремы Пуассона подставим на место слова «вероятность» то, что сам Пуассон принимает за определение вероятности, то мы должны до конца понять полное содержание этой теоремы. И вот, как мы знаем, классическое определение вероятности характерно тем, что оно совершенно не принимает во внимание частоту наступления известного события, но чисто формально полагает: вероятность есть частное от деления числа «благоприятных» случаев на число всех «равновозможных» случаев. У правильной монеты выпадения обеих сторон

«равновозможны», один из этих двух случаев «благоприятен» появлению герба, а потому вероятность результата «герб» равна $^1/_2$. Согласно этому определению, составляющему единственную основу вывода теоремы Пуассона, выражение, что то или иное событие обладает вероятностью, близкой к 1, равнозначно с утверждением, что почти все «равновозможные» случаи ему «благоприятны». Если произвести n бросаний монеты, то при больших значениях n число возможных результатов весьма велико; первые десять бросаний могут дать «герб», остальные—«надпись», первые двадцать и последние тридцать — «герб», остальные—«надпись» и т. д.; разнообразие действительно очень велико. Каждая из этих серий результатов должна быть признана «равновозможною» с каждой другой, если за вероятность выпадения «герба», т. е. ту величину, которая выше обозначена через p, считать $^1/_2$. Примем снова $\epsilon = {}^1/_{100}$, тогда теорема Пуассона гласит: среди огромного количества исходов, возможных при больших значениях n, почти все имеют то свойство, что число «гербов» в них отличается от $^1/_2$ в ту или другую сторону не больше, чем на $^1/_{100}$.

Арифметическая иллюстрация

Для того чтобы сделать сказанное еще более наглядным, представим себе ряд результатов игры в орлянку в следующей форме: при выпадении «герба» будем писать каждый раз 1, при выпадении обратной стороны — 0. Таким образом каждой возможной серии из $n = 100$ бросаний соответствует определенное стозначное число, имеющее своими цифрами только нули и единицы. Если зачеркнуть несколько нулей, лежащих влево от первой единицы, то и такое число, имеющее менее ста цифр, пред-

ставит нам некоторую серию испытаний. Все эти числа, каждое из которых представляет собою один из группы равновозможных результатов, можно выписать друг за другом по очень простой схеме. Первыми по величине будут 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1 000, 1 001 и т. д. (число образуемых таким путем чисел, при $n = 100$, огромно, а именно равно 2 в сотой степени, т. е. около миллиона триллионов). При этом 101, например, означает, что в опытном ряду сперва стоит 97 нулей, потом единица, затем нуль и наконец снова единица. Если бы мы имели $n = 1\,000$, то ряд чисел, дающих всевозможные результаты, начинался бы таким же образом, только был бы много длиннее (охватывал бы 2^{1000} чисел), потому что теперь пришлось бы дойти до 1 000 мест, и 101 означало бы, что сперва идут 997 нулей, затем первая единица и т. д. Теорема Пуассона есть не что иное как известное высказывание об этих числах, из которых первые здесь выписаны. Если мы возьмем все числа, образованные из нулей и единиц, до стозначных включительно, то приблизительно 16% из них содержат от 49 до 51 единиц. Если мы дойдем до 1 000-значных, то найдем, что гораздо больший процент, а именно около 47%, среди них содержит от 490 до 510 единиц. Среди 10 000-значных комбинаций из нулей и единиц уже больше чем 95% имеют число единиц между 4 900 и 5 100; едва 5% падает на комбинации, у которых число единиц отличается больше чем на $^1/_{100}$ от половины, т. е. от 5 000. Это поведение становится при дальнейшем увеличении числа мест все более и более ярко выраженным. При пользовании классическим определением вероятности его описывают в такой форме, — говорят: «вероятность» числа единиц от 49 до 51 в первом случае равна 0,16;

аналогично во втором случае 0,47, в третьем 0,95. Содержание теоремы (для $p = {}^1/_2$), как она доказана у Бернулли и Пуассона, можно, если положить $\epsilon = 0{,}01$ формулировать следующим образом: если написать все числа, состоящие из нулей и единиц, включительно до n-значных, то те из них, у которых число единиц составляет по меньшей мере $0{,}49\,n$ и по большей мере $0{,}51\,n$, образуют большинство, с ростом числа n становящееся все более подавляющим.

Эта формулировка — чисто арифметической природы; она относится к известным числам, о свойствах которых нечто высказывается. Все это не имеет ничего общего с тем, что действительно происходит при единичном или многократном проведении 1 000 бросаний, т. е. какому чередованию нулей и единиц будут соответствовать действительно осуществляющиеся ряды опытов. В рамках этого хода мыслей невозможно сделать никакого заключения о фактическом течении опытного ряда, потому что согласно принятому определению вероятности последняя символизирует собою только соотношение между числами благоприятных и неблагоприятных случаев и ничего не говорит о частоте, с которой данное событие наступает или не наступает.

Легко понять, что наше рассуждение приципиально может быть перенесено на всякий другой случай вместо игры в орлянку: если, например, речь идет об игре с «правильной» костью, то на место чисел, состоящих из нулей и единиц становятся все n-значные числа с цифрами от 1 до 6, а теорема гласит, что при большом n те из них, которые содержат приблизительно $n/6$ единиц, составляют подавляющее большинство. Резюмируем теперь все сказанное.

Математические выводы Бернулли—Пуассона—Чебышева не приводят ни к какому утверждению касательно фактического течения ряда опытов до тех пор, пока они оперируют с понятием вероятности, не опирающимся на частоту наступления события; поэтому их нельзя привести ни в какую связь с тем опытным основоположением, из которого исходил Пуассон.

Апостериорная апелляция к частотам

Но как же Пуассон пришел к тому, чтобы видеть в своих математических выводах подтверждение того согласного с опытом поведения, которое он в своем введении назвал «законом больших чисел»? Всякому, кто поставил себе этот вопрос, нетрудно на него ответить. Ответ гласит: Пуассон в конце своего рассуждения придал слову «вероятность» другое значение, чем то, которое он вложил в него сначала. Вероятность $^1/_2$ выпадения «герба», входящая в выкладки, должна означать только частное от деления числа «благоприятных» на число всех «равновозможных» случаев, но вероятность, близкая к 1, которая получается в результате этих выкладок и играет в его теореме решающую роль, должна означать, что соответствующее событие, а именно выпадение от 0,49 до 0,51 «гербов» в серии из n опытов, наблюдается почти всегда, почти при каждой серии опытов. Никто не может признать допустимым такое смещение значения терминов на пути от начала задачи к ее концу. Совершенно неясно также, при какой величине вероятности должно наступать изменение значения. Может ли быть уже вероятность 0,16 при 100 бро-

саниях истолкована так, что серии, содержащие от 49 до 51 «гербов», случаются с относительной частотой 16%, или это имеет значение только для вероятности 0,95, которая вычислена при длине серии 10 000?

Если во что бы то ни стало хотят сохранить классическое определение вероятности, то желаемое значение теоремы Пуассона можно спасти только с помощью дополнительной (в качестве *deus ex machina*) гипотезы примерно следующего характера: как только для известного события вычисление дало в результате значения вероятности, не многим меньшее чем единица, это явление в ряду последовательных опытов наступает почти всегда. Но разве это не «частотное» определение вероятности, хотя и несколько ограниченное? Если значение вероятности, равное 0,999, должно показывать, что событие наблюдается почти всегда, почему тогда не признать, что вероятность 0,50 означает: событие наступает в половине всех случаев. Правда, это утверждение должно быть уточнено, и даже при этом условии еще не все будет сделано. Нужно показать сперва, что из надлежащим образом уточненного определения вероятности с помощью частоты можно вывести теорему Пуассона. Ход мысли классического доказательства при этом изменится в решающих пунктах. Но давать после доказательства теоремы содержащемуся в ней выражению новое значение безусловно недопустимо. Мы еще раз фиксируем: только если вероятность в какой-нибудь форме определяется как частота наступления события, только в этом случае результат выкладок Пуассона вообще может быть поставлен в связь с тем, что он во введении к своей книге называет «законом больших чисел».

Теперь, однако, мне сделают справедливое возражение: если мы хотим определить вероятность выпадения «герба», как предельное значение относительной частоты, с которой выпадает «герб», то нам придется сделать предпосылку о существовании такого предельного значения, другими словами, придется принять с самого начала значимость «закона больших чисел», в смысле «введения» Пуассона. Какой же еще может тогда иметь смысл утомительными выкладками пробивать дорогу к теореме, которая высказывает ведь только то, что уже дано в предпосылке? На это мы ответим: теорема, которая является результатом математической дедукции Бернулли—Пуассона—Чебышева, если только принять определение вероятности посредством частот, высказывает несравненно больше, чем одно только существование предельного значения; она гораздо содержательнее, чем выраженный во введении Пуассона «закон больших чисел». Ее существенное содержание в этом случае состоит в определенном утверждении относительно порядка выпадения двух сторон монеты при неограниченно продолжаемой игре. Можно легко указать опытные ряды, для которых выполняется то, что Пуассон в своем введении признает характеристическим, и для которых тем не менее теорема Пуассона неверна. Для того чтобы убедиться в этом, мы рассмотрим вполне определенную последовательность опытов, обладающую тем свойством, что относительная частота положительного результата приближается в ней к значению $^1/_2$, как при игре в орлянку, и для которой, однако, теорема Пуассона окажется неверной. Само собою разу-

меется, что это есть такой ряд опытов, к которому ни один человек, знающий свойства исчисления вероятностей, не станет его применять. Но нашей целью является ведь только показать, что теорема приписывает последовательностям, изучаемым в теории вероятностей, некоторое особое, типичное для них свойство.

Опровергающий пример

Мы возьмем в качестве объекта опыта таблицу квадратных корней, т. е. таблицу, которая для следующих друг за другом целых чисел 1, 2, 3... и т. д. указывает значение их квадратных корней с точностью до шестого десятичного знака или более. Наше внимание мы направляем исключительно на цифру, стоящую каждый раз на шестом месте после запятой, и будем считать «положительным» результатом опыта, который мы снова обозначим цифрой 1, тот случай, когда этот шестой знак есть 5, 6, 7, 8 или 9. Нулем, или «отрицательным» результатом опыта мы обозначаем такой случай, когда квадратный корень числа на шестом месте после запятой имеет 0, 1, 2, 3 или 4. Так мы получаем в результате всего ряда наблюдений последовательность из нулей и единиц, которые чередуются определенным образом. Если каждая фактически существующая таблица, естественно, должна на каком-либо числе закончиться, то нетрудно мысленно безгранично продлить эту последовательность нулей и единиц. Легко угадать и можно математически точно доказать, что в этой последовательности относительная частота как единиц, так и нулей обладает предельным значением $^1/_2$. Верна даже еще более общая теорема, что на шестом месте квадратного корня каждая из десяти цифр от 0 до 9 включительно

появляется в бесконечном ряду с частотой $^1/_{10}$. Посмотрим теперь, соответствует ли поведение нашей последовательности из нулей и единиц тому, чего требует теорема Пуассона. Если бы это было так, то, согласно вышесказанному, при достаточно большом n в бесконечной последовательности почти каждая серия из n цифр приблизительно наполовину должна состоять из нулей и наполовину из единиц.

Начало таблицы, действительно, рисует похожую на то картину; в чем легко убедиться, если, например, принять за длину серий количество чисел, стоящих на одной странице, и затем установить, как часто встречаются цифры, меньшие или большие чем 4. Но о том, как дело идет дальше, если мы представим себе таблицу продолженной за пределы фактически напечатанного, мы узнаем из небольшого вычисления. При этом мы воспользуемся легко доказуемой формулой, согласно которой квадратный корень из выражения $a^2 + 1$, при a много большем, чем 1, приблизительно равен $a + \frac{1}{2a}$. Если мы положим a равным, например, миллиону, следовательно, a^2 равным биллиону, то мы найдем, что квадратный корень, если продвинуться в таблице от $a^2 = 10^{12}$ на одну строчку, меняется только на $^1/_2\ 10^{-6}$, т. е. на половину единицы шестого знака. Только когда сделаешь приблизительно 10 шагов, значение корня повышается на пять единиц шестого знака. Это означает, что в той области таблицы, в которой a равняется приблизительно миллиону, наша последовательность из нулей и единиц должна содержать регулярные повторения, длиной около 10 знаков, и притом попеременно из 10 нулей и 10 единиц. Если мы пойдем еще дальше, например до a, равного ста миллионам, то подобное же рассуждение учит

нас, что теперь будут наступать чередующиеся повторения нулей и единиц приблизительной длины в 1 000 знаков, и т. д.

Структура последовательности нулей и единиц, происшедшей из таблицы квадратных корней, следовательно, совсем другая, чем та, которую, согласно со всеми данными опыта, требует теорема Пуассона для последовательности, являющейся результатом длительной игры в «орлянку». Только в самом начале она кажется иррегулярной, в дальнейшем она состоит из регулярных повторений, длина которых медленно, но безгранично возрастает. Противоречие с теоремой Пуассона налицо. Если мы выберем сколь угодно большое значение n (например n-1 000) в качестве длины серии, то, если мы только продвинемся достаточно далеко (примерно до $a = 100$ миллионам), длина повторений станет больше, чем n. Начиная отсюда, почти все серии будут состоять либо из одних нулей, либо из одних единиц, тогда как, согласно теореме Пуассона, почти все они должны состоять приблизительно наполовину из единиц, а наполовину из нулей. Мы видим, что здесь, в случае с квадратными корнями, предельное значение частот $^1/_2$ осуществляется только благодаря тому, что всегда имеется приблизительно одинаковое число серий, содержащих одни нули и соответственно одни единицы, тогда как в случае с азартными играми выравнивание числа нулей и единиц происходит уже в пределах каждой или почти каждой отдельной серии.

Несообразности

Этот пример можно было бы, кстати, привести для того, чтобы показать, с каким отсутствием критики не-

которые математики подходят к вопросам исчисления вероятностей.

Почти в каждом учебнике, в качестве примеров применения теорем исчисления вероятностей, можно найти последовательности чисел только что рассмотренного рода, которые этим теоремам прямо противоречат и уже по одному своему происхождению не могут удовлетворять предпосылкам теории вероятностей; мы не говорим уже о приведенном Пуанкаре примере логарифмических таблиц, в котором обнаруживается — если вести вычисления правильно — даже отсутствие предельного значения относительных частот. Классики теории вероятностей, Бернулли, Пуассон, Лаплас, создали также многочисленные, чисто аналитические теоремы из области учения о рядах, интегрального исчисления и т. д., в высоком значении которых для хода исторического развития анализа никто не станет сомневаться. Несмотря на это, никто из математиков не собирается в настоящее время оставлять эти теоремы в их старой форме. Это невозможно уже потому, что все основополагающие определения анализа (которые только и дают возможность надежного систематического построения) за это время сделались совсем иными. Насколько естественно такое поведение аналитиков, настолько же удивительно, с каким полным отсутствием критики первоклассные математики настоящего времени вновь и вновь пытаются сохранить старинную формулировку теорем Бернулли или Пуассона с их историческими доказательствами, несмотря на то, что здесь налицо те же ложные круги, перестановки переходов к пределу и подобные ошибки, которые в анализе давно уже искоренены. Пример последовательности нулей и единиц,

взятой из таблицы квадратных корней, показывает нам, что существуют ряды явлений, в которых относительные частоты отдельных возможных результатов обладают определенными предельными значениями, но вместе с тем к ним не применима теорема Пуассона. Этим прежде всего обезоруживается часто повторяемое возражение, будто бы принимая наше определение вероятности, мы тем самым уже постулируем справедливость этой теоремы (Г. Полиа). Еще менее обосновано утверждение, что, допуская наличность предельных значений относительных частот, принимают за «достоверное» то, что, согласно теореме Пуассона или Бернулли, может иметь значение только «в высшей степени вероятного» (Г. Вейль). В качестве странности совсем недавнего происхождения отметим еще попытку сколотить некое новое понятие «стохастического предела» из существования предельных значений и теоремы Бернулли-Пуассона—(Е. Е. Слуцкий). Все эти заблуждения происходят от того, что исходят из классического определения вероятности, которое не имеет ничего общего с ходом явлений, а затем пользуются терминологией, тесно связанной с этим ходом («с достоверностью можно ожидать, что...»).

Правильный вывод

Теперь мы выяснили, что теорема, доказанная Пуассоном в четвертой главе его книги, если принять определение вероятности как предельного значения частоты, содержит ценное утверждение, в известной мере позволяющее охарактеризовать порядок результатов, которых можно ожидать при длительном ряде опытов.

Остается, однако, еще открытым вопрос, можно ли вообще математически доказать теорему Пуассона, полагая в ее основу наше определение вероятности. При этом следует заметить, что теорема, высказывающая что-нибудь о действительности, только тогда может быть математически доказуемой, если во главу вывода поставить взятые из опыта исходные положения, так называемые аксиомы. В нашем случае одна из этих аксиом заключается, как явствует из всего вышесказанного, в допущении, что в пределах опытных рядов, рассматриваемых исчислением вероятностей, относительные частоты отдельных событий обладают предельными значениями. Это не что иное как то опытное положение, которое Пуассон в своем введении называет «законом больших чисел» и которое он (ошибочно) считает доказанным в четвертой главе своей книги. Но этой одной аксиомой дело еще не сделано. Нужно как-нибудь охарактеризовать ряды опытов, на которые должен распространяться метод теории вероятностей, в противоположность рядам, подобным рассмотренным нами таблицам квадратных корней, которые недоступны этому методу вследствие присущей им закономерности. Этому служит подробно рассмотренное нами требование «иррегулярности», или, как мы его назвали более наглядно, «принцип невозможности системы игры». Полагая в основу эти два свойства коллектива, мы получаем, путем ряда чисто математических рассуждений, о которых я здесь не мог говорить подробнее, теорему Пуассона, и получаем ее сразу в том смысле, как того хотел Пуассон (и чего он своим доказательством не достиг), а именно, в виде некоторого утверждения о фактическом ходе явлений. Именно, в качестве частного след-

ствия полной иррегулярности последовательности обнаруживается, что, если рассматривать достаточно длинные серии, то уже в пределах почти каждой серии с большим приближением имеет место статистическое выравнивание. Ясно, что наличность такого закона чрезвычайно о б л е г ч а е т эмпирическое отыскание предельных значений относительных частот. Может быть, мы практически никогда не дошли бы до познания первого свойства коллектива, если бы вследствие иррегулярности не имела места теорема П у а с с о н а, согласно которой предельное значение должно себя обнаружить почти в каждой длинной серии наблюдений. Но эта практическая связь не может затемнить того логического соотношения между отдельными предложениями, которое мы здесь старались выяснить и еще раз хотим выразить в следующих кратких формулировках.

Резюме

1. То, что П у а с с о н называет во введении к своей книге «законом больших чисел», есть констатирование следующего опытного факта: в известных последовательностях явлений относительная частота наступления события при неограниченно продолжаемом наблюдении приближается к определенному предельному значению. Этот факт находит себе непосредственное выражение в нашем «первом требовании» по отношению к коллективу.

2. Если придерживаться классического определения вероятности, то математическая теорема, доказанная П у а с с о н о м в четвертой главе его книги и названная им снова «законом больших чисел», не содержит никакого утверждения о фактическом ходе явлений и по-

тому не может быть поставлена ни в какую связь с опытным фактом, описанным в пункте 1, а заключает в себе только замечание арифметического характера.

3. Если же, опираясь на опытное положение пункта 1, принять определение, согласно которому вероятность события есть предельное значение относительной частоты его наступления, то теорема четвертой главы книги Пуассона означает некое совершенно определенное утверждение относительно хода явлений, которое, однако, не совпадает с опытным положением пункта 1, но выражает больше него, а именно содержит относительно чередования положительных и отрицательных результатов опыта то утверждение, что, рассматривая достаточно длинные серии явлений, мы в пределах почти каждой из них встретим приближенное выравнивание различных возможных результатов.

4. Для того чтобы правильно доказать теорему Пуассона в смысле нашего определения вероятности, нужно, кроме опытного положения о существовании предельных значений опереться еще на другое положение, постулирующее полную «иррегулярность» в течение рассматриваемых явлений и выставленное нами как «второе требование» по отношению к коллективу.

После этого разъяснения остается открытым еще вопрос терминологического характера, а именно: что́ целесообразнее называть «законом больших чисел»? Я бы предложил оставить это название за теоремой, первым доказательством которой мы обязаны Бернулли и Пуассону, фактическое же содержание, изложенное во введении Пуассона, называть опытным предложением или аксиомой о существовании предельных значений.

Но ни в каком случае нельзя найти (и это есть результат, ради которого я приводил эти исследования) в законе больших чисел чего-либо такого, что позволило бы обойтись без определения вероятности при помощи частоты наступления события и что дало бы возможность перехода от определения, основанного на равновозможности, к исследованию действительного хода явлений. Я мог бы теперь окончательно покинуть область общих математических исследований и обратиться к некоторым выводам, касающимся применения теории, если бы не существовало еще второго круга проблем, подобного нами рассмотренному, которым классическое исчисление вероятностей часто пользуется в качестве костыля для сходных целей. Дело касается теоремы Бейеса, которую иногда называют обратной по отношению к теореме Бернулли. Многие авторы утверждают, что именно эта теорема, а не теорема Бернулли, узаконивает сближение вероятностей, рассчитываемых на основании определения равновозможности, с наблюденными частотами. Этого вопроса я не буду рассматривать так подробно, как предыдущий, потому что основные рассуждения в этих двух случаях часто протекают параллельно друг другу; после сказанного до сих пор вряд ли можно ожидать, чтобы «обращение» подробно исследованной нами теоремы вдруг произвело то чудо, которого мы тщетно ожидали от прямой теоремы. Для наших целей будет вполне достаточным, если я опишу существенный смысл теоремы Бейеса, каким он представляется при нашем определении вероятности. Я выпускаю при этом лишь прямое доказатель-

ство того, что из классического определения и здесь может быть выведена только теорема формально-арифметического значения, и никогда не может быть добыто никакого утверждения о действительном ходе явлений.

Проблема Бейеса

Легче всего понять проблему Бейеса, исходя из некоторой комбинации задачи о костях и задачи о лотерее. Представим себе урну, наполненную большим количеством маленьких кубиков или подобных им тел, которые мы кратко назовем «камнями». Пусть каждое из этих тел имеет шесть плоских граней, занумерованных цифрами от 1 до 6, каждая из которых может выпасть (при бросании наших костей из бокала). Пусть при этом отдельные камни имеют весьма различную материальную структуру, так, чтобы среди них попадались иногда «правильные кости», для которых вероятность выпадения шестерки просто равнялась бы $^1/_6$, тогда как остальные имели бы каждый определенную, более или менее отличающуюся от $^1/_6$, вероятность результата «6». Эту вероятность, которая, конечно, может быть определена для каждого тела путем ряда опытов, мы кратко обозначим буквой x, так что каждый лежащий в урне камень характеризуется своим значением величины x. Коллектив, который нам теперь придется рассматривать, имеет элементом следующее опытное явление: после тщательного перемешивания содержимого из урны вынимают один камень, кладут его в бокал, а затем производят известное число, скажем n, бросаний; результатом всего этого опыта или признаком определяемого сейчас коллектива мы будем считать, с одной стороны, значение x вынутого камня, с другой же стороны—частное,

полученное от деления числа n_1 наблюденных выпадений шестерки на число всех бросаний n. Таким образом перед нами двухмерный коллектив, признаком которого является пара значений, а именно комбинация значений x и $n_1 : n$. Распределение этого коллектива, т. е. вероятность получить, определенное заданное значение для x и вместе с тем другое определенное значение для $n_1 : n$, получается согласно правилу связывания, как произведение двух множителей. Первый множитель есть вероятность $v\,(x)$ того, что из урны будет вынут камень с характеристическим значением x. Второй множитель есть вероятность того, что событие, обладающее вероятностью x, наступает n_1 раз при n испытаниях. Элементарное исчисление вероятностей учит тому, как вычислить этот второй множитель по заданным x, n и n 1. Мы можем здесь не интересоваться его формальным выражением, которое, впрочем, было знакомо уже Ньютону, для нас достаточно знать, что такая функция существует [мы назовем ее $w\,(x, n, n_1)$]. Согласно правилу, с которым мы познакомились для случая связывания двух коллективов, вероятность вынуть из урны камень с признаком x и затем при n бросаниях получить ровно n_1 шестерок равна величине произведения $v\,(x)\,.\,w\,(x, n, n_1)$. Если мы примем число опытов n как твердо установленное, то мы можем рассматривать эту величину как функцию от x и n_1/n, и обозначить ее, например, через $f\,(x, n_1/n)$. Мы теперь придем к той постановке вопроса, которая соответствует проблеме Бейеса, применяя операцию разделения к только что рассмотренному, происшедшему путем связывания коллективу. Вспомним о том, что́ означало «разделение»; в простейшем примере игры в кости оно сводилось к

вопросу: как велика вероятность выпадения «2», если уже известно, что выпало четное число очков? При этом из совокупности всех бросаний выделяются те, признаком которых служит четное число. В задаче, о которой идет теперь речь, мы должны произвести следующее разделение: если уже известно, что при n бросаниях n_1 раз выпала шестерка, как велика тогда вероятность, что камень, вынутый из урны (которым были произведены бросания), обладает признаком x, т. е. для него вероятность выпадения шестерки равняется x? Выделяются и сохраняются, таким образом, те элементы, второй признак которых $n_1 : n$ имеет определенное значение, скажем, например, $n_1 : n = a$. Согласно правилу разделения, с которым мы познакомились выше, чтобы получить искомую вероятность, нужно разделить начальную вероятность $f(x, a)$ (выше найденную нами как произведение двух множителей) на сумму всех таких вероятностей, соответствующих сохраненным значениям признака. Складывать при этом приходится все $f(x, a)$ для всех значений x при данном a. Результат сложения есть функция $F(a)$ от одного только a, а окончательный результат деления $f(x, a) : F(a)$ есть функция обеих переменных, x и a, которая, согласно обычному словоупотреблению, выражает собою «апостериорную вероятность» величины x при данном значении a.

Вероятности «причин»

Я здесь описал, может быть слишком подробно, весь ход построения коллективов, нужный для проблемы Бейеса; для наших целей, конечно, нет необходимости исследовать его во всех деталях. Для меня было только важно показать по возможности яснее, что тут дело

идет о нормальной задаче исчисления вероятностей, которая непосредственно укладывается в рамки того, что я выше охарактеризовал как естественную область этой науки: из данных или принимаемых за данные коллективов мы здесь строим новые путем комбинирования четырех основных операций. Я должен, как я уже говорил при обсуждении «разделения» во второй главе моих лекций, по определенным причинам особенно подчеркнуть эту «нормальность» проблемы Бейеса. Почти все учебники, кажется, сходятся на том, что в проблеме Бейеса имеется в виду совсем особый род вероятности, так называемая «вероятность причин, или гипотез», существенно отличающаяся от той «вероятности событий», с которой мы обычно имеем дело. Правда, ввести слово «причина» в формулировку задачи не представляет труда. Нужно только сказать: появление n 1, шестерок при n испытаниях имеет своей «причиной» существование вероятности x для результата «6» у применявшейся кости. Так как вопрос идет о вероятностях различных значений x, то можно сказать, что при этом исследуются вероятности различных причин. Но это только пустой набор слов. Вычислена может быть только вероятность в пределах точно отграниченного коллектива, элементами которого являются точно описанные выше единичные явления: появление определенного камня из урны, следующее затем n раз выбрасывание этого камня из бокала и подсчет выпадающих при этом шестерок.

Теорема Бейеса

Теперь только я перехожу к разбору того, что разумеют под теоремой Бейеса. Она заключается в констатировании некоторого совершенно определенного

свойства той функции распределения $f(x, a) : F(a)$, к которой привело нас наше рассуждение. Конечно, я пропускаю тот математический вывод, который устанавливает это свойство, и привожу только результат, подобно тому, как я это сделал в связи с теоремой Пуассона-Бернулли, имеющей известное сходство с той, которую мы теперь изучаем. Обнаруживается (выразим это сперва несколько неточно), что если число n выбрать очень большим, то вероятности всех значений x, сильно отличающихся от a, делаются очень малыми и что те значения x, которые близки к a, взятые вместе, обладают вероятностью, почти равной единице. Другими словами, оказывается чрезвычайно вероятным, что для камня, у которого при n бросаниях выпало $n_1 = an$ шестерок, вероятность x выпадения шестерки мало отличается от a. Если сообразить, что $a = n_1 : n$ есть относительная частота шестерки при n бросаниях, то станет понятным, что эта теорема опять-таки устанавливает связь между относительной частотой в пределах серии из n опытов и вероятностью. Так как вероятность шестерки для определения кости совпадает с относительной частотой при неограниченно продолженном ряде опытов, то эту теорему можно выразить еще следующим образом: если при n опытах с костью шестерка появилась с относительной частотой a, то при большом n можно почти наверняка ожидать, что при неограниченном продолжении опытов с той же костью получится в результате относительная частота, лишь мало отличающаяся от a. При этом слова: «можно почти наверняка ожидать» означают только: если весь ход действия — вынимание камня из

урны, бросание его n раз и (практически) безграничное продолжение опытов—будет весьма много раз повторено, то в подавляющем большинстве случаев будет наступать предсказанное, а именно приблизительное равенство между относительной частотой, установленной после опытов, и окончательной частотою. Прежде чем подробнее осветить значение этой теоремы, я должен сказать кое-что по поводу ее математического уточнения и несколько ограничить предпосылки, при которых она имеет силу. Мы выше допустили, что в урне находится очень много камней с различными значениями x. При этом x, т. е. вероятность получить при бросании камня число «6», по своему смыслу есть величина, лежащая между 0 и 1. Какова пропорция смеси различных x в урне, как выглядит распределение $v(x)$, которое дает вероятность вынуть камень с определенным x, это в широких пределах безразлично для справедливости теоремы Бейеса. Мы должны сделать только одну предпосылку: встречающиеся вообще значения должны лежать достаточно близко друг к другу для того, чтобы, фиксируя определенную окрестность или «близость» числа a, мы могли быть уверены, что в эту окрестность попадет по меньшей мере одно из этих значений.

Удобнее для краткой математической формулировки и более соответствует конкретным случаям приложений представлять себе распределение $v(x)$ непрерывным или, как мы уже имели случай говорить, геометрическим. Тогда $v(x)$ означает плотность вероятности в точке x, и существенным результатом математического вывода является независимость положения вещей в теореме Бейеса от того, представляет ли собою $v(x)$ равномерное распределение, или любое

другое. Математически уточненная теорема гласит: если при n опытах с костью шестерка появилась с относительной частотой a, и ε означает произвольно малое положительное число, то вероятность того, что предельное значение относительной частоты шестерки при неограниченно продолженных опытах лежит между $a-\varepsilon$ и $a+\varepsilon$, с возрастанием n стремится к единице. При этом безразлично, как распределена (так называемая априорная) вероятность встретить кость с определенной вероятностью выпадения шестерки.

Легко усмотреть, как можно себе представить реализованным случай, соответствующий непрерывному распределению значений x в урне. Представим себе, что мы берем наудачу любую из всех костей определенной величины, сделанных до настоящего времени из слоновой кости. Мы должны допустить, что для нее имеется определенная вероятность x дать при бросании число «6». Это x будет лежать тем ближе к $^1/_6$, чем «правильнее» кость, но a priori x не ограничено какими-либо определенными числовыми значениями (например кратными $\frac{1}{100}$ или $\frac{1}{1000}$), а может принимать любое значение между 0 и 1. Тогда мы имеем право себе представить — подробнее об этом будет сказано при обсуждении теории ошибок, — что существует плотность вероятности $v(x)$, посредством которой определяется вероятность каждой частичной области значений x, а именно как относительная частота, с которой при достаточно много раз повторенном выборе костей появ-

ляются такие кости, для которых значение x попадает в соответствующую частичную область. Тем самым выполнены предпосылки, при которых теорема Бейеса строго правильна. Мы еще только на минуту задержимся, чтобы подробнее рассмотреть ее содержание и отграничить его от рассмотренного выше закона больших чисел.

Взаимоотношение между теоремой Бейеса и теоремой Пуассона

Я уже говорил, что не хочу подробно останавливаться на доказательстве того, что теорема Бейеса, подобно теореме Бернулли—Пуассона, сводится к положению чисто арифметической природы без отношения к действительному ходу каких-либо явлений, если определять встречающиеся в ней величины вероятностей не как относительные частоты, а как частные от деления числа благоприятных случаев на число всех равновозможных. Если хочешь высказать что-нибудь относящееся к ожидаемым фактам или событиям, исходя из определения, основанного на равновозможности, то приходится, как и раньше, контрабандным путем протаскивать гипотезу о том, что событие, для которого вычисление дает вероятность, близкую к единице, наступает «почти всегда», т. е. в подавляющем большинстве опытов. Но этим мы вводим, хотя и в ограничением объеме, определение, основанное на частоте, и снова рискуем оказаться вынужденными в конце нашего рассуждения пользоваться термином «вероятность» в ином значении, чем в начале.

Более важной нам представляется задача точнее отграничить содержание теоремы Бейеса (предполагая,

что в ее основу с самого начала положено определение, основанное на частотах), от рассмотренного нами ранее закона больших чисел, а также от опытного положения или аксиомы о существовании предельных значений относительных частот. На первый взгляд кажется ясным само собою, что теорема: если при большом n найдена относительная частота a, то она почти наверное останется приблизительно неизменной при неограниченном увеличении n, тожественна с простым утверждением, что относительная частота приближается к определенному предельному значению при безгранично увеличивающемся n. Однако решающий момент здесь лежит в словах: «почти наверное» или, как еще нагляднее можно сказать, «почти всегда». Если мы для камня, вынутого из урны, в длинной серии из n опытов обнаружим относительную частоту $n_1 : n = a$, то мы сперва ничего не знаем о том, как этот камень будет вести себя при дальнейшем продолжении опытов. До тех пор, пока мы делаем только предпосылку о существовании предельных значений, но ничего не говорим об «иррегулярности», вполне возможно, что после выбора произвольно большого n у всех камней, которые дали в результате то же самое $n_1 : n = a$, предельное значение относительной частоты окажется совершенно иным, чем наблюденное нами $n_1 : n$. Наша теорема гласит, что это не так, что, напротив, почти во всех случаях предельное значение лежит близко к наблюденной дроби $n_1 : n$. В теореме Бейеса, следовательно, заключается совершенно определенное, только математическим путем доказуемое утверждение, которое я, учитывая его аналогию с теоремой Бернулли—Пуассона, охотно назвал бы **вторым законом больших чисел.**

В заключение этих исследований, которые нас в общем завели несколько дальше в область абстрактных умозаключений, чем я того хотел, мне хочется еще раз противопоставить друг другу содержание обоих законов, а кстати и аксиому существования предельных значений, в их конкретном применении к задаче с костями.

Пусть в n опытах с костью n_1 раз выпала шестерка; тогда:

1. Первая аксиома вместе с нашим определением вероятности утверждает, что при неограниченном увеличении числа опытов отношение $n_1 : n$ приближается к определенному предельному значению, которое и представляет собою вероятность выпадения шестерки для данной кости.

2. Первый закон больших чисел, или теорема Бернулли—Пуассона: если повторять безгранично ряды испытаний неизменной длины n над одной и той же костью, то, если только n не слишком мало, почти все эти ряды будут давать приблизительно одно и то же значение отношения $n_1 : n$.

3. Второй закон больших чисел или теорема Бейеса: среди большого количества различных костей, из которых каждая однажды в n опытах дала n_1 шестерок, почти все обладают тем свойством, что для них предельное значение относительных частот шестерки при неограниченно продолженном бросании близко к первоначально наблюденному значению $n_1 : n$, если только n не слишком мало.

Эти три формулировки точно отграничивают три соответствующих утверждения друг от друга. Нужно еще прибавить, что первая из них есть недоказуемый опыт-

ный факт, т. е. не может быть сведена к более простому факту, тогда как две других могут быть выведены из первой, если присоединить требование «иррегулярности».

С другой стороны, оба закона больших чисел не имеют сколько-нибудь разумного значения, если не предпослать им существования предельных значений относительных частот.

ПРИМЕНЕНИЯ К СТАТИСТИКЕ И ТЕОРИИ ОШИБОК

Этим я заканчиваю обсуждение не только так называемых законов больших чисел, но и теории вероятностей вообще, с тем чтобы обратиться теперь к тем применениям и выводам, какие из нее можно сделать для практической статистики и для других областей науки и жизни. Я позволю себе сначала сделать совсем краткий обзор того, что сказано до сих пор. Прежде всего мы выяснили, в чем состоит требующийся нам процесс образования понятий, и констатировали необходимость положить в основу наших исследований некоторое искусственное, ограниченное по отношению к обычному словоупотреблению, понятие вероятности. Потом выяснилось, что такое понятие в существенных чертах может быть определено следующими признаками: прежде всего должен быть налицо к о л л е к т и в, массовое явление или повторяющееся событие, и мы приходим к «вероятности наступления признака в пределах коллектива», только наблюдая относительные частоты различных признаков среди его элементов. При этом пришлось сделать две предпосылки, а именно: что относительные частоты имеют п р е д е л ь н ы е з н а ч е н и я и

что последние не меняются при произвольном выборе нумеров — аксиома иррегулярности или принцип невозможности системы игры. После того как этим путем были заложены основания, я показал, как можно, при помощи определенных четырех основных операций, строить из данных коллективов новые, распределения которых вычисляются из распределений данных коллективов. Я успел также наметить (фактическое выполнение этого есть дело полного курса исчисления вероятностей), что все без исключения задачи могут быть истолкованы как надлежащие комбинации этих четырех основных действий. Следующий отдел моих исследований касался отношения новой теории к классической, которая характеризуется так называемым «априорным» определением вероятности. Это привело с необходимостью к обсуждению законов больших чисел, которые в классической теории часто называют «мостом» между априорной вероятностью и частотой, которые, однако, на самом деле являются содержательными утверждениями только в пределах теории частот. Таким образом круг теоретических исследований для нас завершен, и я хочу теперь попытаться набросать еще кое-что из того, что можно назвать приложениями этой теории.

Разграничение между азартными играми и играми, основанными на искусстве

В дальнейшем нам почти не придется говорить об азартных играх, которые мы до сих пор всегда приводили в качестве простейших примеров коллективов. Мы еще только коротко рассмотрим один, правда чисто практический, вопрос. В большинстве государств в той или

иной мере ограничены или запрещены азартные игры в общественных местах. При этом возникает необходимость отграничить азартные игры от других, подобных им, игр. Старая уголовно-правовая теория приходила себе на помощь определением, что азартные игры суть «игры алеаторного характера», т. е. худшим из всех возможных толкований, потому что оно заменяет употребительное выражение другим, неупотребительным, но претендующим на ученость. Современное германское уголовное право вообще отказывается от определения. Недавно в Германии через все инстанции прошел ведомственный спор о том, считать ли так называемую игру Bajazzo, в которой шар, опускающийся сквозь сеть штифтов, нужно уловить управляемым рукою сосудом, азартной игрой или нет. Иногда, если и не в этом случае, обстоятельства складываются затруднительно. Никто не усомнится в том, что рулетка есть азартная игра и что шахматы — игра не азартная. Но карточную игру, где ведь по крайней мере распределение карт складывается случайно и где, как говорится, «удача и неудача участвуют в игре», мы все же в силу одного этого не можем считать азартной. Очевидно, здесь возможны все промежуточные ступени в зависимости от того, как связаны элементы случайности с требованиями, предъявляемыми к ловкости и комбинаторским способностям игрока. Разумным будет, повидимому, следующее определение: чисто азартная игра есть такая, при которой шансы игроков на выигрыш, т. е. относительные частоты выигрышей при продолжительной игре, не зависят от личных качеств игроков. Применим ли этот критерий к данному единичному случаю, или нет, это может в конце концов (если дело не идет о чисто

автоматическом процессе, в котором партнеры совсем не участвуют активно) быть установлено только путем статистического опыта, т. е. достаточно длительно продолженным рядом игр. «Априорное» решение, т. е. логическая дедукция из правил игры, ни в каком случае невозможна. Такая возможность иногда ошибочно допускается благодаря тому, что—как, например, в рулетке—в основание бессознательно полагаются более общие опытные данные. Установленная нашими исследованиями точка зрения, согласно которой при игре в кости, как и при игре в рулетку, иррегулярность ряда исходов является результатом опыта, дает возможность цельной концепции всего комплекса возникающих здесь проблем.

Для практической цели законодательства не столь важен вопрос о чисто азартных играх, потому что тогда слишком мало было бы запрещено. Формулировка могла бы быть, например, такой: Запрещаются (или требуют особого разрешения) такие игорные предприятия, в которых относительные частоты выигрышей, выпадающих на долю участников игры после длительного ее продолжения, совсем или почти не зависят от искусства игроков. При игре Bajazzo шар падает, конечно, случайно, но ловкость (быстрота), с которой игрок подставляет бокал для его уловления, сильно влияет на шансы, как это показывает опыт. Напротив, чисто азартная игра была бы налицо, если бы бокал был неподвижно установлен до начала движения шара, причем, конечно, различным положениям бокала пришлось бы поставить в соответствие различные ставки.

Я оставляю теперь область азартных игр и обращаюсь к вопросу, много обсуждавшемуся несколько лет тому назад, который, находясь на границе социальной и биологической статистики, все же обнаруживает близкое сродство с задачами азартных игр. Вюрцбургский философ Марбе развил в своем большом труде «Die Gleichförmigkeit in der Welt» теорию, для характеристики которой хорошо может служить следующий пример. Некий супруг, которому очень желательно иметь сына, просматривает непосредственно перед родами своей жены последние страницы списка новорожденных, с целью установить, больше ли рождалось за последнее время мальчиков или девочек. Он считает свои шансы благоприятными, потому что за последнее время рождалось больше девочек. В то время как, вообще говоря, можно было бы иметь склонность назвать такой ход мыслей вздорным, Марбе говорит: «наши статистические исследования показывают, что совсем-совсем маленькая крупица истины (что до сих пор всегда просматривалось) имеется также и во взглядах этого отца». Это утверждение опирается на обширную статистику из примерно 200 000 записей рождений в четырех баварских городах, которая показала, что только один единственный раз встретилась итерация (т. е. непрерывная последовательность рожденных одного и того же пола) длины 17 и ни разу не было более длинной.

На учете этих длинных итераций покоится и большая часть попыток создать «систему игры», и Марбе в своей книге действительно указывает, как можно наверняка выиграть в Монте-Карло.

Проблема Марбе, о которой, как я уже говорил, много писали, интересна нам только постольку, поскольку она касается основ исчисления вероятностей. Мысль Марбе, очевидно, такова: если перед нами 17 записей мужского пола, то можно с достоверностью или по меньшей мере с большой вероятностью ожидать женской записи. Если понимать следующие друг за другом регистрации, которые могут быть обозначены через *M* и *F* (masculini и feminini), как результаты простой альтернативы, подобной «орлянке», то из второго свойства коллектива, из его «иррегулярности» следовало бы, что и тогда, когда рассматриваются только записи, следующие непосредственно за 17 *M*, среди них будет относительно столько же *M* и *F*, как и в совокупности всех записей. Потому что выделение букв, следующих за 17-кратным *M*, означает «выбор нумеров» вышерассмотренного характера, который ведь не должен оказывать влияния на относительные частоты признаков, т. е. в нашем случае знаков *M* и *F*. Таким образом мы видим, что проблема, которую поставил Марбе своим утверждением о «статистическом выравнивании», приводится к следующей: имеет ли последовательность записей рождений, с указанием пола в качестве признака, свойства коллектива или нет? Ясно, что этот вопрос может быть решен только эмпирически, т. е. посредством наблюдений, и что всякая попытка опровергнуть учение о статистическом выравнивании априорными или логическими утверждениями — бессмысленна. Мы, впрочем, находимся тут почти в центре основных трудностей всякой практической статистики, так как нам надлежит установить, можно ли понимать определенный статистический материал, как коллектив, или нет.

Для решения этого эмпирического вопроса следует прежде всего заметить, что Марбе во всяком случае, несмотря на чудовищный объем своей статистики, не может привести непосредственно никакого неуязвимого основания в пользу своего утверждения. Потому что если итерация длины 17 встретилась только один раз, то тем самым он только один раз произвел опыт, который может показать, что следует за 17 одинаковыми записями; другими словами, при помощи его выбора нумеров был вообще выделен только один единственный элемент, тогда как осмысленное утверждение об отношениях в выбранной частичной последовательности возможно только тогда, если последняя имеет достаточный объем. Но, с другой стороны, из этого положения вещей не следует ничего и против Марбе, и если бы мы не имели возможности другого рода трактовки проблемы, мы бы немногое могли сказать о правильности его утверждения. Но основные операции исчисления вероятностей, с которыми мы познакомились, дают нам возможность из предполагающегося данным простого коллектива с признаками M и F и приблизительным распределением 0,5 : 0,5 вывести новый, элементом которого является серия из n опытов, и распределение которого отвечает ня вопрос: как велика вероятность того, что в серии из n опытов встретится ровно x итераций длины m? Если мы подставим в формулу, получающуюся в результате решения этой задачи, напр. $m = 17$ и $x = 1$, то мы получим вероятность того, что наступит одна итерация длины 17, как она действительно наблюдалась в случае Марбе.

С другой стороны, мы можем вычислить, подставляя $m=18$ и $x=0$, как велика вероятность, что итерация из 18 членов не наступит вовсе. Решающим результатом наблюдения, который привел Марбе к его утверждениям, и являлось то, что один раз были налицо 17 одинаковых записей и ни разу не было 18. Если бы нам удалось показать, что это положение вещей можно было предвидеть заранее на основе исчисления вероятностей, то тем самым мы имели бы сильный аргумент в пользу того, что в записях рождений выполняются те предпосылки, которым должен удовлетворять коллектив.

Если, действительно, вычислить вышеперечисленные величины для $n=49\,152$, в соответствии с четырьмя исследованными сериями, то находим, например, для итераций из 17 членов: вероятность единичного наступления—0,17, многократного наступления—0,02, вероятность отсутствия 17-членной итерации—0,82. Так как из четырех серий одна обнаружила итерацию длиной 17, другие же таких итераций не обнаружили вовсе, то по меньшей мере нет противоречия между результатом вычисления и опытом. Для итерации длины $m=18$ вычисление дает в результате вероятность 0,91 того, что таковая не встретится; и действительно, ни для одного из четырех городов она не встретилась. Здесь не место подробно, путем перечисления всех результатов выкладок и их сопоставления с наблюдением доказывать, что в самом деле существует полное согласие между выводами исчисления вероятностей и свойствами проделанной Марбе статистики. Я это сделал по другому поводу в другом месте.

Каждый, кто интересуется основными вопросами учения о вероятностях, будет благодарен Марбе за про-

деланную им тщательную проработку большого статистического материала, благодаря которой в первый раз надежным образом становится доступным научному исследованию пример столь обширного коллектива, взятого не из области азартных игр. Правда, что касается практических результатов, то мы приходим к выводам, прямо противоположным точке зрения Марбе. Потому что установленное нами согласие между расчетами, построенными на понятии коллектива, и наблюдением может привести только к следующему: последовательность регистраций рождений обладает всеми свойствами коллектива, а потому удовлетворяет и требованию иррегулярности. Поэтому среди всех отцов, жаждущих мужского потомства и попадающих в довольно редкое положение в том смысле, что им приходится ожидать прибавления семейства непосредственно после 17 женских записей, будет столько же счастливых, сколько разочарованных: приблизительно половина из них встретится с восемнадцатым «*F*», и только для другой половины итерация оборвется наступлением «*M*».

Теория скучивания и закон серии

Удивительную противоположность учению Марбе о статистическом выравнивании представляет собою теория «скучивания» Штерцингера (тоже философа), которую биолог П. Каммерер применил к научному обоснованию широко распространенной веры в некий «закон серии». Беда редко приходит одна, гласит народная мудрость, и по Каммереру то же самое должно относиться и к счастливым случаям. Если попытаться выразить «закон серии» более точно, то можно

только сказать: краткие итерации одинаковых результатов опыта встречаются неожиданно часто, будто бы чаще, чем это соответствует теоретическим расчетам. Штерцингер, например, наблюдает последовательность промежутков времени, через которые покупатели входят в известный магазин. Если в среднем на час приходится 30 покупателей, то все же редко случается промежуток времени в две минуты, в течение которого входил бы ровно один покупатель; гораздо чаще двухминутный промежуток остается пустым, или приходят сразу двое или больше покупателей. Из подобных наблюдений Штерцингер делает далеко идущие натурфилософские выводы, и прежде всего он видит в них опровержение исчисления вероятностей. Наша точка зрения на этот вопрос вытекает сама собою из всего сказанного до сих пор. Конечно, существуют также и явления, для которых законы случайности не имеют места, т. е. существуют повторные процессы, являющиеся коллективами, и другие, которые таковыми не являются. Какой из этих двух случаев перед нами, это может решить только точный анализ результатов наблюдения; здесь мало значения имеет поверхностная, основанная на непосредственном впечатлении оценка. Для того чтобы притти к правильному суждению, нужно прежде всего знать те результаты расчета, которые могут быть подвергнуты сравнению с данными опыта.

Таким результатом рациональной теории вероятностей, т. е. применения многократно рассмотренных нами правил расчета, является, например, следующий: если ряд событий случайно распределен по большому отрезку времени таким образом, что на промежуток некоторой определенной длины в среднем падает одно событие,

то мы имеем только вероятность 0,37 того, что произвольно взятый промежуток этой длины содержит в точности одно событие. Напротив, мы имеем вероятность 0,63 того, что в пределах этого промежутка либо не наступит ни одного, либо же наступит более одного события. Таким образом, в случае, указанном Штерцингером, только тогда можно было бы говорить о «скучивании», которое противоречит теории случайности, если бы оказалось, что действительно более двух третей двухминутных отрезков давало отличное от 1 число покупателей. Само по себе это вполне возможно и показывало бы только, что эта последовательность явлений не может быть непосредственно принята за коллектив.

Еще один пример к закону серии. Согласно статистике самоубийств в Германии, в местности с населением в $^1/_4$ миллиона в среднем случается одно самоубийство в неделю. Как часто соответствующему ведомственному журналу придется отмечать «серию» из трех или более самоубийств в течение одной недели? Расчет показывает, что вероятность наступления события больше чем два раза в неделю равна 0,08. Итак, поскольку последовательность самоубийств обладает свойствами коллектива, в среднем следует в году ожидать четырех или пяти недель (52 недели, умноженные на 0,08, дают 4,16) с «сериями самоубийств». Только в том случае, если бы фактический ход явлений значительно превысил это число, мы были бы в праве заключить от этого наблюдения к существованию внутренней связи между смежными во времени случаями. В обширном труде Каммерера о «законе серии» ни в одном примере не дано того основания, которое поз-

воляло бы судить по статистическим данным (обычно слишком малочисленным) о том, является ли данное повторное событие коллективом, или нет.

Сцепленные события

С другой стороны, в статистике известны различные ряды явлений, которые не могут быть непосредственно приняты за коллективы и по поводу которых прекрасно можно было бы говорить о «законе серии».

Повидимому, этого не делают только потому, что такое обозначение по замыслу его авторов должно выразить собою противоречие с исчислением вероятностей, тогда как события, которые я имею в виду, стоят с ним в полном согласии. Простой пример таких «сцепленных» событий представляют собою смертные случаи, являющиеся следствием определенной заразной болезни, например оспы. С самого начала ясно, что здесь статистические данные должны быть распределены совсем иначе, чем, например, в статистике самоубийств. Математик Г. Полиа недавно показал нам, как можно изящным образом справиться с этой проблемой методами исчисления вероятностей. Смертные случаи, наступающие вследствие определенной причины без заболевания заразной болезнью, можно себе, например, представить таким образом: из урны, содержащей черные и белые шары в некоторой определенной пропорции, ежемесячно для каждого обывателя один раз производят выемку; если появится черный шар, то это для него означает смерть. Различным причинам смерти соответствуют различные пропорции смеси черных и белых шаров в урне. Образ этот должен, конечно, выражать только то, что вероятность наступле-

ния определенного числа X смертных случаев в месяц, т. е. появления этого числа в наших статистических данных, может быть вычислена тем же путем, как вероятность вынуть из урны ровно X черных шаров при данных определенных условиях. При этом предполагается, что после каждой выемки вынутый шар кладется обратно, так что шансы остаются неизменными.

Для «заразной» статистики этот образ уже не подходит. Здесь, повидимому, в случае новой смерти шансы на дальнейшие смертные случаи увеличиваются. Можно, согласно Полиа, учесть это обстоятельство следующим образом — или, как часто говорят в таких случаях: следующей «урновой схемой»: как только вынимается черный шар, он не только кладется обратно, но число шаров в урне увеличивается на определенное число черных. Таким образом, мы имеем теперь дело не с одним единственным, но с целым рядом различных исходных коллективов, распределения которых нам, однако, точно известны; иначе говоря, с урнами различного состава. Можно путем известных основных операций вывести отсюда производный коллектив, элементом которого будет всё несколько сложное явление из n следующих друг за другом тиражей, причем через n обозначается число обывателей. Полиа показывает, как при помощи сравнительно простой формулы можно выразить вероятность наступления 0, 1, 2, 3 ..... и т. д. смертных случаев в месяц (т. е. соответственно стольких же появлений черного шара при n тиражах). Насколько хорошо расчет совпадает с наблюдением, я покажу на следующих числах, заимствованных из швейцарской оспенной статистики с 1877 по 1900 г. При среднем значении 5,5 случаев в месяц наблюда-

лось: 100 месяцев без смертных случаев, 39 с одним смертным случаем, 28 с двумя, 26 с тремя, 13 с четырьмя, 3 с пятнадцатью. Теория «сцепленных» событий заставляла ожидать следующих чисел: для отсутствия смертных случаев 100,4, для 1—4 смертных случаев соответственно 36,3, 23,5, 17,5, 13,8 и для пятнадцати—3,0. Напротив, если не принимать во внимание сцепления, если, следовательно, положить в основу урновую схему с простым возвращением в урну вынутого шара, то получилось бы: для отсутствия смертного случая 1,2, для 1—4 случаев соответственно числа 6,5, 17,8, 32,6, 44,9, для 15 случаев—число 0,1. Ясно видно превосходство правильной теории над примитивной. Однако без расчета трудно охватить влияние сцепления, которое отнюдь не выражается только в преобладании более длинных серий.

Общая задача статистики

Я говорил уже выше о том, что вопрос, затронутый Марбе, подводит нас вплотную к центральному пункту всей статистической проблемы, давая повод к исследованию того, является ли определенный ряд, полученный путем статистической регистрации, коллективом, или нет. Если бы я хотел в наиболее общем виде формулировать проблему, вырастающую из вероятностной обработки вопросов биологии и социальной статистики, то я должен был бы выразиться примерно следующим образом. Перед нами полученный путем статистической записи числовой материал, например число браков, заключенных в различных частях Германии в течение ряда лет; возникает задача: или непосредственно признать эти числа за коллектив — точнее, за ко-

нечный отрезок бесконечной числовой последовательности, которая обладает свойствами коллектива,— или как-нибудь редуцировать их к коллективам, истолковать в качестве происшедших из коллективов. Мы только что познакомились с поучительным примером этого в статистике сцепленных смертных случаев, где представлялась возможность истолковать наблюдаемый ряд чисел, который сам по себе не обладал полной «иррегулярностью» и, следовательно, не мог образовать коллектива, сводя его к определенным другим коллективам. Я сейчас покажу на ряде отдельных задач, в чем заключается здесь роль теории вероятностей. Но позвольте мне сначала лишний раз подчеркнуть только что упомянутое определение основной проблемы теоретической статистики, потому что в этом я вижу один из главных пунктов моей задачи.

При поверхностном взгляде можно было бы усмотреть противоречие в том, что понятие коллектива сперва было заимствовано из рассмотрения статистических рядов, — ведь я, например, пользовался статистикой смертности для определения вероятности смертного случая; а после этого делается проблема из того, является ли данный статистический ряд коллективом или, соответственно, каким образом он с коллективом связан. Но и здесь тот, кто хоть немного знаком с методикой естественных наук, легко сумеет разрешить кажущееся противоречие. Теория тяготения Ньютона, как мы знаем, приводит к утверждению, что пути планет вокруг солнца суть эллипсы, и как раз наблюдения Кеплера над эллиптической формой путей послужили исходной точкой для этой теории. Мы знаем также, что ни одна из восьми больших или тысячи малых планет, обегая вокруг солнца, не образует точного эллипса и что суще-

ственной задачей вычислительной астрономии как раз и является свести наблюденные траектории к тем закономерностям, которые постулируются Ньютоновой теорией. Точно так же мы в теории электричества Максвелла имеем общие рамки, по отношению к которым мы убеждены, что они охватывают собою все электрические и магнитные явления (отвлекаясь от явлений в очень быстро движущейся среде). Однако огромной и никогда до конца не разрешимой задачей остается задача истолковать отдельные конкретные явления (как они, например, протекают в электрической машине), как реализации простых соотношений, выраженных в уравнениях Максвелла. То, что так называемые «Gedankenexperimente», лежащие в основе созданных им понятий и соотношений, не соответствуют непосредственно никакому действительно наблюдаемому в природе явлению и реализуются только в редких случаях, и то с известным приближением, все это не может еще служить возражением против Максвелла. Подобным же образом и я надеюсь отпарировать возражения, утверждающие, что конкретная статистика никогда не ведет к рядам чисел, которые непосредственно и точно представляли бы собою коллективы. Дело вовсе не в этом, а единственно и исключительно в том, что можно сделать с помощью теории вероятностей, построенной на абстрактном понятии коллектива, в области приложений. Я приведу теперь несколько относящихся сюда примеров.

Идея Лексисовой теории дисперсии

Известный геттингенский экономист В. Лексис обогатил практическую статистику приемом, который очень удобным образом может служить для сравнения стати-

стически полученного ряда чисел с определенным коллективом. Я хочу пояснить мысль Лексиса на примере небольшой статистической записи, которую вы сами в любое время легко можете сделать. Пусть исследуется вопрос о том, насколько часто буква «*a*» попадается в определенном латинском тексте, например в начале «*Bellum Gallicum*» Цезаря. Если в качестве предмета обследования взять первые 20 групп по 100 букв каждая, то найдутся две группы с пятью «*a*», по три группы с шестью, семью и восемью «*a*» в каждой, снова две с девятью, затем одна группа с десятью, по две с одиннадцатью и двенадцатью и, наконец, одна с тринадцатью и одна с четырнадцатью «*a*». В общем это дает 174 «*a*», следовательно, в среднем 8,7 в одной группе. Здесь возникает следующий вопрос: как относится результат, который обнаружила статистическая запись, к тому, чего следовало бы ожидать, если бы мы 20 раз произвели тираж по 100 билетов из урны, в которой каждый билет отмечен одною из 25 букв латинского алфавита и билеты смешаны в надлежащей пропорции, и затем подсчитали бы, сколько раз в пределах каждой сотни появлялась буква «*a*». При этом разумно будет предположить, что 8,7% билетов будут отмечены буквой «*a*», так как среди 100 букв мы в среднем нашли 8,7 «*a*».

Для того чтобы ответить на этот вопрос, можно было бы поступать, например, так: сперва вычислить для коллектива, элементом которого является стократная выемка из урны, его распределение, т. е. вероятность того, что среди 100 букв не найдется ни одного «*a*», найдется одно, два, три... и т. д.; затем соответственно сравнить эти вероятности с действительными частотами

различных, обнаруженных наблюдением, чисел повторения буквы «*а*». Получается, например, вероятность 0,10 для шестикратного, 0,14 для восьмикратного появления «*а*», так что при 20 опытах следует ожидать $20 . 0{,}10 = 2$ раза шестикратного и $20 . 0{,}14 = 2{,}8$, следовательно, от 2 до 3 раз, восьмикратного появления. В действительности как шесть, так и 8 наблюдались по три раза. Здесь не легко говорить о согласии или противоречии, особенно потому, что пришлось бы принять во внимание всю совокупность возможных чисел появления (простирающуюся от 0 до 100). Естественно ощущается потребность в конкретной мере для определения степени согласованности результатов расчета и наблюдения, в такой мере, которая в известном смысле давала бы среднюю оценку того, что получается для отдельных чисел появления. Теория Лексиса и состоит в том, что дает эту меру; она дает, в виде одного единственного числа, критерий степени согласованности (или соответственно расхождения) наблюдения с тем, чего можно ожидать от сравнения с коллективом.

Среднее значение и дисперсия

Для того чтобы подойти к критерию Лексиса, я сперва должен определить, что́ разумеется под дисперсией ряда чисел. Я предполагаю известным, что «среднее значение» получается путем сложения всех отдельных значений и деления полученной суммы на число слагаемых. В нашем примере 20 полученных значений находились между 5 и 14, и среднее оказалось равным 8,7. Если мы теперь вычислим разность между каждым значением и средним, то мы получим новый ряд, состоящий отчасти из положительных, отчасти из отрица-

тельных чисел. Трем появлениям числа 7, например, соответствуют теперь три отрицательных разности — 1,7, двукратному появлению 11 — двукратная положительная разность 2,3, и т. д. Из того способа, каким было вычислено среднее число, следует, что сумма всех этих положительных и отрицательных разностей равна нулю, т. е. что положительные и отрицательные разности взаимно уничтожаются. Согласно вышеприведенной сводке, мы имеем:

2 раза	разность	—3,7
по 3 »	разности	—2,7,— 1,7, — 0,7
2 »	разность	0,3
1 раз »	. . . . .	1,3
по 2 раза	разности	2,3 и 3,3
по 1 разу »	. . . . .	4,3 и 5,3.

Сумма значений отрицательных разностей оказывается, как мы видим, $2 . 3{,}7 + 3 . (2{,}7 + 1{,}7 + 0{,}7) = 7{,}4 + + 15{,}3 = 22{,}7$, и точно такова же сумма положительных разностей. Отсюда видно, что было бы невозможно получить меру дисперсии (т. е. «рассеяния») результатов посредством сложения отклонений отдельных результатов от среднего. Такую меру можно, однако, получить очень простым образом, возводя в квадрат отдельные положительные и отрицательные разности и образуя среднее значение этих по необходимости положительных квадратов. Этим путем, т. е. как *среднее арифметическое* квадратов отклонений, и определяется обычно *дисперсия* числового ряда. Ясно, что эта величина тем меньше, чем теснее отдельные значения группируются вокруг среднего арифметического, и что она тогда, и только тогда, становится равной нулю, когда все отдельные значения совпадают между собою, а следовательно, и со средним арифметическим. В нашем при-

мере мы должны взять дважды квадрат числа — 3,7, т. е. $2.13{,}69 = 27{,}38$, по три раза квадраты чисел — 2,7 — 1,7 и — 0,7, т. е. $3(7{,}29 + 2{,}89 + 0{,}49) = 3.10{,}67 = 32{,}01$, и т. д. Сумма всех квадратов равна 140,20, и после деления ее на 20 мы получаем для «дисперсии» значение 7,01.

Сравнение действительной и ожидаемой «дисперсии»

Лексис сравнивает затем вычисленную таким путем дисперсию эмпирически заданного ряда чисел с некоторой определенной величиной, к которой приводит вероятностный анализ указанного нами выше коллектива. Если вообразить себе, что производится по 100 тиражей из урны, содержащей из общего числа 1 000 билетов 87 с начертанием «*a*», то число вынутых «*a*» можно рассматривать как признак элемента (состоящего из 100 тиражей). Но затем можно при помощи операции связывания соединить 20 таких элементов в некоторый новый элемент или, вернее, в элемент некоторого нового коллектива. Признаком элемента в пределах образовавшегося 20-кратным связыванием коллектива может служить любая величина, определяемая всеми двадцатью группами произведенных опытов, в том числе и дисперсия ряда из двадцати чисел появления буквы «*a*» в этих группах. Повторным применением правил, которые мы рассматривали раньше, удается найти распределение нового коллектива, следовательно, вероятность любого возможного значения дисперсии. Так, например, можно было бы вычислить, как велика вероятность получить как раз дисперсию 7,01. Более подходящим, однако, нам представляется следующий ход мысли.

Если в коллективе с несколькими возможными исходами или значениями признаков каждое из этих значений помножить на вероятность его появления и все такие произведения сложить между собою, то мы получим число, которое с полным основанием называют «ожидаемым значением» данного признака, а иногда несколько романтически характеризуют как «математическое ожидание» его [1]). Если, например, кто-нибудь в азартной игре имеет 20% вероятности выиграть 10 руб., 30% вероятности выиграть 20 руб., тогда как в остальных 50% случаев он не должен рассчитывать ни на какой выигрыш, то он будет считать своим «математическим ожиданием»: $0{,}20.10+0{,}30.20=8$ руб. Смысл «математического ожидания», конечно, тот, что оно выражает собою выигрыш (соответственно значению признака), который, при неограниченно продолжаемом ряде партий в среднем падает на отдельную партию. Алгебра учит нас тому, как в отмеченном нами случае коллектива, образованного повторным связыванием, можно просто определить математическое ожидание признака. Если n означает число групп (в нашем случае 20), z—число партий в одной группе (в нашем случае 100) и, наконец, p—вероятность наблюдаемого события в пределах одной партии (в нашем случае $87:1\,000=0{,}087$), то математическое ожидание дисперсии дается формулой

$$\frac{n-1}{n}\,zp(1-p).$$

Мы можем здесь не касаться вопроса о том, как выво-

---

[1]) Последний термин почти исключительно принят в русской литературе, вследствие чего мы и сохраняем его в дальнейшем. (Прим. ред.)

дится эта формула; это дело чисто формально-математическое, которое ничего общего не имеет с логическими основами теории. Если подставить $n=20$, $z=100$, $p=0{,}087$, то для математического ожидания дисперсии получается

$$\frac{19}{20}.100.0{,}087.(1-0{,}087)=\frac{19}{20}.8{,}7.0{,}913=7{,}55.$$

Это число, как выше уже упомянуто, показывает, какова должна быть в среднем величина дисперсии, если бесконечно часто повторять наши 20 групп по 100 опытов. Лексис противопоставляет это теоретическое значение фактически наблюдаемой дисперсии (в нашем случае 7,01) и видит в частном от деления второго числа на первое искомую меру для оценки согласия между теорией и наблюдением. В нашем случае $7{,}01:7{,}55=0{,}928$ немногим отличается от 1. В этом мы вместе с Лексисом усматриваем подтверждение того допущения, что появление буквы «*a*» в изучаемом латинском тексте в общем и целом «случайно» и приблизительно подчиняется закономерностям, свойственным коллективу.

Но не всякий ряд чисел, даваемый статистической записью, обнаруживает такую согласованность между фактической дисперсией и ее математическим ожиданием, и то различие, которое во многих случаях имеет место между этими двумя числами, представляет собою ценный критерий для природы исследуемого числового материала. Теория дает разнообразные указания на то, чем могут быть объяснены эти возможные «расхождения в дисперсии», как их называет Лексис. Я приведу два небольших относящихся сюда замечания.

Вопрос о соотношении рождаемости мальчиков и девочек весьма часто был предметом статистического исследования. За 24 месяца 1908 и 1909 гг. в Вене в общем родилось 93 661 живых детей, следовательно, в среднем 93 661 : 24 = 3 903 в месяц. Из них 48 172, или в среднем 2 007 были мужского пола, так что «мужская доля» для всего промежутка времени равняется 48 172 : 93 661 = 0,51 433. Если для каждого месяца вычислить частное от деления числа мальчиков на число всех рождений, то числа колеблются между 0,4904 в марте 1909 г. и 0,5275 в августе того же года. В последовательном порядке «мужские доли» составляют: 0,5223, 0,5125, 0,5141, 0,5246, 0,5126, 0,5136, 0,5187, 0,5213, 0,5105, 0,5203, 0,5124, 0,5141, 0,5143, 0,5093, 0,4904, 0,5097, 0,5140, 0,5089, 0,5129, 0,5275, 0,5178, 0,5130, 0,5177, 0,5027.

Среднее арифметическое этих чисел, как легко можно вычислить, есть 0,51397, их дисперсия, которую следует вычислять указанным выше способом, равна 0,0000533. Мы ищем теперь, сообразно с теорией Лексиса, математическое ожидание дисперсии, которая служит признаком в пределах коллектива со следующим элементом: 24-кратное повторение группы в 3 903 тиража из урны, которая на 1 000 билетов содержит 514, отмеченных буквой «*M*» (masculinum). Формула, пригодная здесь, только потому несколько отличается от только что приведенной, что мы теперь рассматриваем в качестве признаков не самые числа событий (т. е. числа рождений мальчиков) и соответственно их дисперсию, а относительные числа (мужские доли). Результатом

этого является то, что множитель z в формуле переходит из числителя в знаменатель, так что следует взять

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{z} p(1-p),$$

где $n=24$, $z=3\,903$, $p=0{,}514$. Вычисление дает следующий результат:

$$\frac{23}{24} \frac{0{,}514 . 0{,}486}{3\,903} = 0{,}0000613.$$

Это число, как мы видим, в $613 : 533 = 1{,}15$ раз больше фактического результата статистики. Вообще говоря при исследовании «мужской доли» обнаруживается лучшее совпадение, и поэтому в данном случае следует искать объяснения этой довольно значительно «поднормальной» дисперсии. Такое объяснение действительно легко можно найти, прибегая к помощи дальнейших вероятностных исследований. Если в основу расчета положить вместо рассмотренного нами выше коллектива, элементом которого были 24 группы по 3 903 тиража из одной и той же урны, несколько более сложный коллектив, у которого для каждой группы из 3 903 тиражей (соответственно стольких же рождений) имеются в распоряжении несколько урн с различными пропорциями смеси (части населения с различными «мужскими долями»), то оказывается — на основании известной алгебраической теоремы, — что математическое ожидание дисперсии от этого у м е н ь ш а е т с я. Теперь легко допустить, что «мужская доля» новорожденных есть свойство расы или племени и что поэтому в кругу населения, представляющего собою известную смесь рас, должна ожидаться меньшая дисперсия, чем у населения совершенно чистой расы. Такое объяснение нашего примера как раз для населения Вены можно считать вполне правдоподобным.

Статистика смертности со сверхнормальной дисперсией

Гораздо чаще, чем с такими случаями «поднормальной» дисперсии, в практической статистике приходится иметь дело с рядами чисел, которые значительно превышают меру ожидаемой дисперсии. Рассмотрим, например, статистику смертности в Германии за десятилетний срок с 1877 по 1886 год, в течение которого однообразие жизни не нарушалось никакими заметными внешними событиями. Следующая маленькая таблица показывает во втором столбце число смертных случаев, относящихся к каждому году; рядом, в третьем столбце указано число смертей, падающих на каждую 1 000 жителей.

Умерли:

в 1877 г.	в общем	1 223 156	на	каждую	1 000	жителей	28,0
» 1878 »	»	1 228 607	»	»	1 000	»	27,8
» 1879 »	»	1 214 643	»	»	1 000	»	27,2
» 1880 »	»	1 241 126	»	»	1 000	»	27,5
» 1881 »	»	1 222 928	»	»	1 000	»	26,9
» 1882 »	»	1 244 006	»	»	1 000	»	27,2
» 1883 »	»	1 256 177	»	»	1 000	»	27,3
» 1884 »	»	1 271 859	»	»	1 000	»	27,4
» 1885 »	»	1 268 452	»	»	1 000	»	27,2
» 1886 »	»	1 302 103	»	»	1 000	»	27,7

Только тот, кто не знаком с математической статистикой, наверно удивится при виде однообразия этих чисел, особенно относительных чисел последнего столбца. Более старые писатели не могут надивиться тому, сколь поразительно «устойчивы» условия человеческой жизни перед лицом статистики. Если же вычислить, какова здесь фактическая величина дисперсии, и срав-

нить ее, сообразно теории Лексиса, с ее математическим ожиданием, то получится совершенно иной результат. Среднее арифметическое десяти коэфициентов смертности будет равно 27,41 на 1 000, или, выраженное в виде десятичной дроби, 0,02741. Если теперь вычислить разности между отдельными значениями и средним арифметическим и возвести их в квадрат (следовательно, например, для первого года: $0{,}028 - 0{,}02741 = 0{,}00059$; $(0{,}00059)^2 = 0{,}0000003481$) и потом найти среднее арифметическое полученных таким образом квадратов, то получается дисперсия 0,0000000949. Это число, правда, кажется очень маленьким. Но формула стр. 155 для математического ожидания дисперсии дает число еще гораздо меньшее, так как стоящее в знаменателе число z в нашем случае огромно. Очевидно, следует подставить вместо n значение 10, вместо p — величину 0,02741, и вместо z — число «опытов» в пределах каждой из десяти групп наблюдений, т. е. численность населения Германии, которая с 1877 по 1886 г. составляла круглым счетом 45 миллионов. Вычисление дает

$$\frac{9}{10}\,\frac{0{,}02741 \,.\, 097259}{45\,000\,000} = 0{,}000\,000\,000\,533,$$

т. е. число в $949 : 5{,}33 = 177$ раз меньшее, чем фактически наблюденное. Фактическая дисперсия чисел смертности превышает свое математическое ожидание почти в двести раз. Как это объяснить?

Солидарность случаев

Сообразим, что это за коллектив, с которым теория Лексиса сравнивает ход годичной смертности. Элемент его составляет десятикратное повторение группы из 45

миллионов тиражей из урны, которая, как мы можем сказать, содержит 274 «черных» билета и 9726 «белых» из общего числа 10 000. Если бы в начале каждого года каждый житель Германии подходил к подобной урне и должен был вынуть из нее свой жребий жизни или смерти (само собой разумеется, что после каждой выемки билет кладется обратно для того, чтобы оставалась неизменной пропорция смеси), то следовало бы ожидать, что смертность за 10 лет обнаружила бы дисперсию в 177 раз меньшую, чем та, которая наблюдалась в действительности. Ясно, однако, что этот образ только очень несовершенно передает игру жизни и смерти человека. Самый примитивный опыт учит нас, что существует много явлений, которые солидарно служат причинами смерти для множества людей, например плохая погода того или иного зимнего или летнего месяца, неблагоприятно сложившееся хозяйственное положение в части страны, эпидемическое заболевание и т. п. Гораздо ближе к действительным условиям можно подойти, если вообразить, что вынимает свой жребий не каждый единичный из 45 миллионов жителей независимо от всех других, но подходит к урне и вопрошает судьбу небольшая часть «представителей» от целых групп. По формуле стр. 155 математическое ожидание дисперсии увеличивается в той же мере, в какой уменьшается число z независимых между собою единичных случаев в пределах одной группы. Таким путем мы получили бы полное соответствие между наблюдением и ожиданием, если бы мы согласились принять, что для каждых 177 жителей Германии был вынут один общий жребий, решающий судьбу жизни или смерти всех 177.

Можно ли считать это объяснение сильно «сверхнормальной» дисперсии посредством «солидарности» событий правильным в каждом данном случае, это зависит еще от дальнейших исследований. Прежде всего придется потребовать, чтобы однажды вычисленный из ряда опытов объем «солидарной группы» оставался приблизительно неизменным, когда мы станем рассматривать другие аналогичные ряды, например коэфициент смертности второго десятилетия. Но как раз в приведенном нами примере общей для всего населения смертности это очень плохо оправдывается. Я не буду задерживаться на обсуждении других числовых рядов, для которых это объяснение оправдывается в большей мере; я лучше рассмотрю вопрос о том, в каком направлении можно было бы еще искать теоретического обоснования для появления дисперсии, существенно превышающей меру ожидания. Работам Л. Борткевича мы обязаны ценными разъяснениями этих обстоятельств.

Если рассматривать статистику смертности за несколько лет под ряд, то естественно принять, что вероятность смерти изменяется от года к году и, следовательно, оставаясь при прежнем образе, что пропорция смеси черных и белых билетов в урне каждый год иная. Если принять, например, что в 1877 году вероятность смерти равнялась 0,0280, в следующем затем году 0,0278 и т. д., то мы придем к заключению, что каждый год случалось именно то, чего следовало ожидать. Однако этим путем мы не придем к рациональному взгляду на вещи: слишком большая свобода в предпосылках отнимает всякую ценность у выводов и лишает

теорию всякого содержания. Только в том случае, если бы к тем же колебаниям вероятности нас привело что-нибудь другое, мы могли бы видеть в их допущении объяснение фактического положения вещей. В этом направлении действительно можно кое-чего достигнуть, если только продвинуть на один шаг вероятностное исследование. Именно, если рассматривать коллектив, элементом которого, как и прежде, является объединение из n групп по z тиражей в каждой, причем только теперь для каждой группы применяется своя урна со своей пропорцией смеси, то в результате вычисления математического ожидания дисперсии к формуле на стр. 155 прибавится определенный положительный добавочный член в качестве нового слагаемого. Это слагаемое, которое часто называют «существенной компонентой колебания», есть — как показывает расчет — не что иное как величина дисперсии, которую непосредственно можно образовать из пропорций смеси в отдельных урнах, вычисляя для этих различных между собою чисел среднее значение, потом уклонения отдельных значений от среднего, их квадраты и т. д. Детали при этом совсем не важны, решающим является только то, что член, прибавляющийся к вычисленному прежде по формуле стр. 155 выражению, представляет собою величину, не зависящую от числа z единичных наблюдений, т. е. выемок в пределах одной группы (соответственно численности населения), но обусловленную исключительно колебаниями вероятности от группы к группе (от года к году). Таким об. разом мы получаем средство для того, чтобы проверить правильность расширенной теории Лексиса, т. е. допустимость сравнения исследуемого статистического ряда с коллективом, образованным тиражами из n различных урн-

Разумно будет допустить, что если вероятность смерти во всем государстве изменяется от года к году, например благодаря меняющимся хозяйственным и климатическим условиям, то те же колебания приблизительно в той же мере обнаружатся и в отдельных, более крупных частях страны. Но благодаря тому, что, как мы говорили, добавочный член математического ожидания дисперсии не зависит от численности населения, он должен иметь одну и ту же величину как в статистике всей страны, так и в статистике некоторой ее части. Это дает возможность проверки теории. Стоит только сопоставить числа, полученные для всего государства, с числами, найденными для какой-либо его части, например для одного из союзных государств. Тогда, если допущение о том, что «сверхнормальная дисперсия» имеет своей причиной колебания вероятности смерти, было правильно, перевес наблюденной дисперсии над вычисленной по формуле стр. 155 в обоих случаях, т. е. как для всего государства, так и для его отдельной области, должен иметь приблизительно одну и ту же величину.

Статистика самоубийств

Я хочу пояснить это на примере, который был тщательно проработан Л. Борткевичем, на статистике самоубийств в Германии за десятилетие с 1902 по 1911 г. (При исследовании общей смертности приходится учитывать еще другие определенные моменты, которые характеризуются общим выражением: уменьшение смертности вследствие успехов гигиены.) В течение вышеуказанных лет в Германии в среднем приходилось 213,9 самоубийств в год на каждый миллион жителей. Отдель-

ные коэфициенты лежали между 204 и 223 на миллион, следовательно, в виде десятичных дробей, между 0,000204 и 0,000223. Дисперсия, которую из этих десяти чисел можно вычислить многократно описанным нами способом при помощи нахождения среднего арифметического, отдельных разностей и их квадратов, равняется 30,9 биллионных, или, как это лучше записать, чтобы избежать десяти нулей после запятой, $30{,}9 . 10^{-12}$. Математическое ожидание дисперсии находится согласно нашей формуле; если подставить вместо z число жителей государства, а именно 61,6 миллионов, вместо n— число 10, вместо p—только что указанное среднее арифметическое 0,0002139, то для него получается значение $3{,}12 . 10^{-12}$, т. е. почти в десять раз меньше фактического значения. Теперь сравним это положение вещей с числами, которые были получены в великом герцогстве Баденском, т. е. одной из областей государства, в которой обстоятельства в отношении самоубийств были сходны с обстоятельствами всей страны. Здесь годовые числа колебались между 193 и 225 на миллион, среднее арифметическое равнялось 214,9, и фактическая дисперсия оказывается равной $126{,}3 . 10^{-12}$, т. е. больше чем в четыре раза превышает дисперсию, найденную для всего государства. С другой стороны, формула математического ожидания дисперсии (число жителей Бадена равнялось 2,04 миллионам и составляло только одну тридцатую часть всего государства) дает в результате приблизительно в тридцать раз большее число, именно $94{,}8 . 10^{-12}$ (если подставить $n = 10$, $z = 2{,}04 . 10^6$ и $p = 0{,}0002149$). Здесь, таким образом, наблюденная дисперсия только приблизительно в $^4/_5$ раза больше ожидаемой.

Но если мы в обоих случаях составим разность между действительной и вычисленной дисперсией, то в первом случае (для всей страны) мы будем иметь 30,9—3,12, т. е. круглым счетом 28.10^{-12}, а во втором (для Бадена)—126,3—94,8, т. е. круглым счетом $31,10^{-12}$. Вы видите, что эти числа очень близки друг к другу. Это дает возможность отнести тот большой перевес дисперсии, который обнаруживается в статистике самоубийств всего государства, точно так же как и значительно меньший перевес, установленный для Бадена, за счет «существенной компоненты колебания», т. е. за счет изменяющейся от года к году тенденции к самоубийству, или, как можно было бы также сказать, меняющейся с годами вероятности самоубийств. Я не стану замалчивать, что результаты не столь благоприятны при исследовании любых других частей государства и что вообще к полной ясности ведет только гораздо более глубокое проникновение, в особенности статистического предмета, и в математическую теорию.

Я хотел только показать и надеюсь, что этим и прежними примерами до известной степени сделал понятным следующее: теория вероятностей, построенная на понятии коллектива, способна разъяснить смысл и значение статистического ряда чисел; она дает возможность сравнивать между собою и ставить в связь друг с другом различные числовые ряды, проверять разные гипотезы о происхождении регистрируемых событий и таким образом позволяет нам делать существенные выводы о предмете, которому была посвящена статистическая запись.

Социальная и биологическая статистика. Учение о наследственности

С течением времени области, к которым применяются статистические рассуждения, все больше и больше расширяются. Древнейшей областью широкого применения статистики была область социальных явлений, и теперь еще существуют сторонники взгляда, что только политические и экономические науки представляют собою «законную» почву для применения статистических методов. Первоначальное значение слова «статистика», повидимому, есть «учение о государстве». Этот раздел статистики несомненно уже давно завоевал себе прочное место среди наук. Не следует слишком серьезно относиться к тому, что как раз в этой области все вновь и вновь поднимаются голоса, утверждающие, что статистика не имеет ничего общего с теорией вероятностей. Это приблизительно то же, как если бы кто-нибудь утверждал, что можно быть политиком, ничего не понимая в истории своей страны, или что можно строить мосты, не владея законами статики. Классические достижения в области социальной статистики во всяком случае были созданы в другом духе. Так, Адольф Кетле (1869) предпослал своему основоположному сочинению «Социальная физика», в котором содержится знаменитая концепция «среднего человека» и которое плодотворным образом влияло на целых два поколения исследователей, большую работу астронома Гершеля по исчислению вероятностей. В отношении материала Кетле многократно затрагивает область биологии человека, а через ее посредство и область медицины. В настоящее время, как уже сказано, так называемая био-

метрика, учение о статистической концепции биологических связей, занимает обширное место, особенно в Англии. С этими исследованиями связываются необычайные надежды на то возвышение и облагораживание человеческой расы, которое нашло себе выражение в термине «евгеника»; эти слишком широко поставленные цели не всегда благоприятным образом влияли на научность соответствующих исследований. Гораздо более благоприятно в этом направлении дело обстоит в родственной области исследования, в учении о наследственности, статистические основы которого были созданы августинским монахом Грегором Менделем.

Мендель открыл, что появление известных биологических признаков в пределах индивидуумов данного поколения, а также и процесс наследования от поколения к поколению, может быть воспринято, как коллектив. В отношении к каждому, как теперь говорят, «менделирующему» признаку отдельный индивидуум обладает двумя предрасположениями. Например, цвет лепестков гороха есть «менделирующий» признак, именно менделирующая альтернатива: красный — белый; точно такую же альтернативу представляет собою цвет зерен: зеленый — желтый. Каждый экземпляр гороха, таким образом, принадлежит в отношении цвета своих лепестков к одному из трех типов: красный — красный, красный — белый или белый — белый. При каждом акте размножения со стороны каждого из родителей потомству передается то или другое из его предрасположений, причем вероятность передачи каждого из них равна $^1/_2$.

Если, например, оба родительских экземпляра принадлежат к типу красный — белый, то для потомства получается вероятность $^1/_4$ каждой из комбинаций красный —

красный, красный — белый, белый — красный, белый — белый. При этом две средних комбинации дают один и тот же тип, которому, таким образом, соответствует вероятность 0,5. Иногда смешанный тип внешне неотличим от одного из чистых (доминирующий признак), так что теоретически получается распределение $^1/_4 : {}^3/_4 = 1 : 3$. И на самом деле, Мендель наблюдал, что 8023 гороховых семян дали 2001 зеленых и 6022 желтых, Батесон нашел в 15806 семенах 3803 зеленых и 11903 желтых, то и другое в полном согласии с теорией.

Из простых допущений учения Менделя о наследственности, конечно, не всегда допускающих непосредственную проверку, получаются, в связи с основными законами исчисления вероятностей, самые широкие выводы, замечательное согласие которых с эмпирическими данными садоводства и животноводства является одним из лучших подтверждений практической пригодности теории вероятностей, построенной на понятии коллектива. Статистика наследственности в настоящее время есть очень далеко продвинутая и чрезвычайно плодотворная в своих приложениях наука. Она дает исчислению вероятностей много изящных, иногда и очень трудных задач, однако эти задачи не имеют принципиального значения для основоположений самой теории.

Статистика в технике

Еще сравнительно молодую и мало изученную область применений теории вероятностей, также не представляющую принципиальных трудностей, мы находим в некоторых задачах современной промышленной техники. От-

части здесь дело идет о вопросах, относящихся к области теории ошибок (о которой подробно будет сказано ниже), например когда приходится проверять равномерность продукции определенной фабрики стальных шариков (которые для целей применения в шарикоподшипниках должны быть сделаны с точностью до $^1/_{100}$ *мм*). Но попадаются и проблемы нового типа, интересные как теоретически, так и практически, которые я могу, пожалуй, охарактеризовать как «проблемы плотности использования». Электрическое предприятие рассчитывает свои установки при помощи статистических наблюдений, касающихся частоты и интенсивности их использования абонентами. При этом совокупность абонентов является коллективом, а время и суточный расход энергии — признаком. Разнообразнее и интереснее в этом направлении задачи, возникающие при организации самовключающейся телефонной сети. Конечно, было бы невозможно или по крайней мере в высшей степени неэкономно производить установки с таким расчетом, чтобы все соединения между каждыми двумя абонентами могли действовать одновременно. Гораздо целесообразнее вычислить на основании вероятностных допущений, подлежащих затем опытной проверке, каких групп соединений следует ожидать со сколько-нибудь заметной вероятностью. Комбинация, для которой при этом получается очень небольшое значение вероятности, конечно, тоже может когда-нибудь осуществиться; но она осуществляется именно очень редко. Здесь вероятность является в самом непосредственном виде приближенным значением относительной частоты, на нее совершенно полагаются и сознательно рискуют тем, что в этих редких случаях все устройство перестанет функционировать.

Картина возможных применений и результатов статистического исследования, которую я пытался вам набросать, была бы неполной, если бы я не упомянул о целом ряде ошибочных, а часто и нелепых теорий, которые, к сожалению, нередко попадаются в литературе. Такие заблуждения, которые странным образом чаще всего встречаются в медицинских работах, для нас особенно поучительны потому, что они показывают, как мстит за себя каждый отход от тех прочных основоположений, на которых мы построили понятие вероятности.

Действительно, можно до конца проследить происхождение почти каждой ошибки, немного вдумавшись в те коллективы, распределение которых играет роль при отыскании искомых вероятностей. Я хочу здесь несколько подробнее рассмотреть один пример, связанный с именем одного выдающегося психиатра, но вместе с тем и одного известного математика.

У одного пациента при вспоминании определенных латинских стихов выпало слово «aliquis». На вопрос о возникающих у него по поводу слова «aliquis» ассоциациях он называет разделение «a — liquis». В качестве последующих ассоциаций к слову «liquis» он указывает: реликвия, жидкость и затем примыкающие сюда семь дальнейших слов, которые можно до известной степени включить в комплекс представлений, символизируемых словами кровь—жидкость, и, наконец, десятое слово неопределенного характера. Из этого «статистического» положения вещей, т. е. из того, что принадлежащие комплексу ассоциации появились с относительной частотой $^9/_{10}$, делается следующий вывод: допущение психо-

аналитической теории Фрейда, что забывание слова «aliquis» должно быть объясняемо вытеснением его названным комплексом представлений, обладает вероятностью, отличающейся от 1 только на дробь, имеющую 25 нулей после запятой (и, следовательно, исчезающе малую!). Собственно говоря, делается вывод, еще гораздо дальше идущий, а именно, что эту огромную вероятность следует приписать самой теории Фрейда. Но это мы будем рассматривать, просто как ошибку, так как очевидно, что даже полная достоверность правильности теоретического утверждения в одном случае еще ничего в статистическом отношении не говорит о самой теории.

Автор получает приведенное числовое значение вероятности следующим образом. Он считает, что среди всех «идей образованного человека» в среднем одна из тысячи может быть приведена в связь с вышеуказанным комплексом представлений. Затем он решает следующую задачу, относящуюся к области проблемы Бернулли: как велика вероятность того, что при десятикратном тираже из урны, содержащей на тысячу шаров один черный, появятся девять черных? В результате действительно получается приблизительно $^1/_{10}$ в 26-й степени, т. е. десятичная дробь с 25 нулями после запятой. Но что общего имеет это совершенно правильно решенная задача с первоначально поставленным вопросом?

Исправление

Повидимому, автор хочет видеть результат своего статистического опыта в том, что лицо, подвергавшееся этому опыту, построило связанных с комплексом ассоциаций больше, чем это сделал бы средний «образо-

ванный человек». Тогда, однако, он должен был бы сперва установить, как часто в среднем среди ассоциаций, построенных к слову «liquis», попадаются такие, которые имеют отношение к критическому комплексу. Трудно предположить, чтобы образованный человек, услышавший слово «liquis», не ассоциировал с ним в ближайшую очередь слов реликвия и liquid—жидкий, и не продолжал бы затем некоторое время ассоциировать в кругу этих представлений. Психиатр даже проговаривается, что он сам думает так, потому что он замечает, что уже разделение на «a» и «liquis» указывает на критический комплекс. Во всяком случае, мы можем выразиться так, что выбор исходного коллектива уже неправилен: дело не в том, как часто попадаются критические представления среди всех возможных, а в том, как часто они попадаются среди тех, которые обычно ассоциируются с «liquis».

Однако построение производного коллектива из того, который предполагается данным, тоже ошибочно. Если мы будем придерживаться терминологии урновой схемы, то дело ведь обстоит следующим образом: при $n = 10$ тиражах появление черного шара имело частоту $n_1 : n = a = 0{,}9$; если предположить, что вероятность появления черного шара при нормальных условиях равна 0,5, то, спрашивается: как велика вероятность того, что урна, из которой производились тиражи, содержит относительное число черных шаров x, которое больше чем 0,5? Вопрос, очевидно, относится к области проблемы Бейеса, а не Бернулли, и разрешается при помощи правила Бейеса, которое дает в результате около 0,95. При этом принимается, что так называемая априорная вероятность иметь дело с урной опре-

деленного состава x для всех значений x одна и та же. Только в том случае, если бы число опытов n существенно превышало 10, мы могли бы применить неоднократно упоминавшуюся выше теорему, в силу которой результат расчета становится независимым от так называемого априорного распределения. Помимо этой есть еще дальнейшая неточность в допущении того, что частота попадания в критическую область свободных ассоциаций к слову «liquis» у нормального, не предубежденного человека составляет 0,5. Во всяком случае результат, найденный таким путем и признающий за допущением Фрейда вероятность 0,95, содержится в разумных границах по сравнению с прямо-таки нелепым утверждением вероятности $1-10^{-26}$.

Резюмируя, следует сказать: если вообще делать из приведенной статистики какие-нибудь вероятностные выводы, то следовало бы: 1) выбрать другой исходный коллектив; 2) дать хоть сколько-нибудь обоснованную оценку для той вероятности, которую мы определили в 0,5; 3) применить формулу Бейеса вместо формулы Бернулли; 4) значительно увеличить число опытов, учитывая неизвестность «априорного распределения». Впрочем, вероятно, было бы правильнее вовсе не строить расчетов на десяти наблюдениях, а принять за доказанное, что слово «aliquis» для всех людей связано звуковыми ассоциациями с вышеуказанным комплексом. Дело сводилось бы тогда к исследованию и оценке того, с какой частотой в среднем встречается забывание слова «aliquis» у той или иной группы людей. Если такого рода исследование признается невыполнимым, то приходится отказаться от статистических заключений, а не вымучивать их неправильными путями.

Выше я охарактеризовал общую задачу теоретической статистики как исследование того, образует ли эмпирически полученный ряд чисел коллектив, или каким наиболее простым способом он может быть сведен к коллективам. На целом ряде примеров мы могли усмотреть, как эта задача проводится в отдельных случаях. В проблеме Марбе, где дело шло о простой альтернативе, т. е. о последовательности из нулей и единиц, была возможность непосредственно сравнивать известные из наблюдения частоты с вычисленными значениями вероятностей. В других случаях к цели, т. е. к сопоставлению эмпирического числового ряда с теоретическим коллективом, приводил более суммарный способ исследования, основанный на дисперсионной теории Лексиса и аналогичных рассуждениях. Однако я не могу умолчать о том, что и теперь еще имеется много статистических результатов, для которых решение задачи в только что указанном смысле удалось не вполне и шансы на ее полное разрешение в ближайшем будущем также невелики.

В таких случаях, а также и во многих других, в качестве первого шага исследования оказывается полезным, не обращаясь к понятию вероятности, предварительно подвергнуть статистический материал математической обработке. Для этой цели служит та ветвь математической статистики, которую я предложил бы называть «описательной». При этом «описание» следует понимать в тесном смысле слова, просто как передачу непосредственно данного теми или иными определенными средствами, отказываясь от его логического включения в ка-

кое-либо систематическое целое. Задача описательной статистики таким образом сводится к тому, чтобы возможно точнее охарактеризовать данный статистический ряд посредством типических признаков. С простейшими из таких признаков мы уже познакомились: это — среднее арифметическое наблюдений и их дисперсия.

Конечно, среднего значения и дисперсии недостаточно, чтобы сравнивать между собою любые статистические ряды. С течением времени в статистику было введено большое количество иных «характеристик» (достаточно назвать медиану, или «срединное значение», различные «средние» уклонения, квартили, децили и др.), что дало, однако, мало нового по сравнению с тем, к чему приводят обычное среднее арифметическое и дисперсия. К. Пирсон, основатель большой статистической школы в Англии, сделал попытку расширить круг описательных возможностей в другом направлении; он заключал определенные типичные распределения в формулы, к которым затем должны были сводиться по возможности все встречающиеся случаи. Однако наиболее совершенным с математической точки зрения и наиболее плодотворным является метод, введенный Брунсом в его «Kollektivmasslehre». Основываясь на идее астронома Бесселя, Брунс показал, как можно любой статистический ряд с произвольной степенью точности охарактеризовать при помощи неограниченной последовательности определенных «характеристик». Первыми в этой систематически строящейся последовательности являются названные уже выше среднее значение и дисперсия, затем следуют «скошенность», «эксцесс» и т. д. Ценным дополнением этого хода мыслей мы обязаны также шведскому астроному Шарлье.

У нас нет повода подробнее вникать в эти вопросы, так как здесь дело идет о той ветви статистических исследований, которая непосредственно не имеет ничего общего с исчислением вероятностей. Для общей ориентации важно только знать, что различные средства и методы описательной статистики, нахождение статистических характеристик, типы кривых Пирсона, разложения Брунса и Шарлье и т. д. следует понимать лишь как предварительные ступени, как предварительную работу перед действительным теоретическим проникновением в материал.

Основы теории ошибок

Я хочу теперь прибавить еще несколько слов о той ветви вероятностно-статистических исследований, которая нашла себе наиболее распространенное и наименее спорное применение и которая может служить переходом к проблемам теоретической физики, подлежащим нашему рассмотрению в последней главе, о так называемой теории ошибок. Почти во всех наблюдениях, состоящих в измерении или определении величины чувственно воспринимаемых вещей, неизбежно встречаются колебания, причинами которых мы считаем так называемые «ошибки наблюдения». Если мы многократно будем измерять со всей доступной нам точностью расстояние между двумя фиксированными на земной поверхности точками, то мы несомненно получим значения, меняющиеся от раза к разу. Мы допускаем, что это расстояние имеет совершенно определенное, вечное или по крайней мере неизменное в пределах того промежутка времени, в течение которого происходят наши измерения, «истинное» значение и что поэтому результаты наших

измерений (за исключением, самое большее, одного) неверны, что они содержат «ошибки». В причинах появления этих ошибок нет недостатка. Если мы пользовались линейкой и, как полагается, приняли во внимание влияние температуры на изменение ее длины, то все же тут могло еще играть роль непосредственное действие солнечных лучей, какое-нибудь еще недостаточно изученное изменение материала, некоторое происшедшее по каким-нибудь причинам незаметно малое искривление линейки и т. п. К этому присоединяются неточности отсчета в микроскопе — известно, что два наблюдателя лишь в редких случаях констатируют одно и то же деление, — возмущающее влияние движения воздуха, сотрясения, недостаточной упругости и т. д. Будем ли мы твердо стоять на том, что действительно существует точное «истинное» значение,— это вопрос гносеологии, который нам здесь не приходится разрешать. Фактическое положение вещей таково, что полученные числа, если мы их проследим для достаточно длинного ряда опытов, обладают свойствами коллектива. Это, правда, не всегда непосредственно можно показать в том смысле, чтобы действительно проверить, как реагирует частота определенного результата на увеличение числа наблюдений или на тот или иной выбор нумеров. Однако здесь дело обстоит так, как почти всегда в области применения математических теорий: если нельзя непосредственно усмотреть правильности теоретических предпосылок, то зато проверяются и подтверждаются в действительности следствия, выведенные из теории.

Великий математик Карл Фридрих Гаусс был одним из первых, открывших применимость учения о вероятностях к анализу ошибок наблюдения. На этом

он основал научный метод, который в настоящее время под именем «теории выравнивания» находит себе многочисленные применения, прежде всего в геодезии и астрономии, а затем и в каждой естественной науке, имеющей дело с наблюдениями. Принципиальное основание этого метода заключается в теореме, которая ведет свое начало еще от Лапласа, хотя в своем настоящем значении она была понята только значительно позднее. Теорема эта имеет существенно математическую природу, и я не могу изложить ее здесь в полном объеме и во всех подробностях, касающихся только специалиста. Но то принципиальное, что она собою выражает, все же слишком важно для того, чтобы быть обойденным здесь. Я думаю, что это до известной степени можно сделать понятным и не углубляясь в формализм математики. Ошибки или, лучше сказать, взаимные отклонения ряда наблюдений одной и той же величины имеют, как я уже отмечал, много причин; и, может быть, вас не удивит, если я скажу, что как раз в этом многообразии имеющихся в каждом отдельном случае источников погрешностей и следует искать объяснения того, что возможна общая теория ошибок наблюдения, что обнаруживается известное единообразие в поведении наблюдаемых отклонений.

Доска Гальтона

Замечательное наглядное представление о том, что получается в результате совместного действия множества отдельных независимых друг от друга причин ошибок, дает нам опыт, который я могу вам здесь воспроизвести и который общеизвестен под именем доски Гальтона. На плоской, слегка наклонной доске здесь укреплены

40 горизонтальных рядов проволочных штифтов, параллельных между собою и находящихся на расстоянии 8 *мм* друг от друга. Между каждыми двумя горизонтальными рядами таких штифтов имеется расстояние приблизительно той же величины. При этом важно, что в каждых двух следующих друг за другом рядах штифты смещены на 4 *мм*, так что, например, каждый штифт десятого ряда находится в точности над (или под) серединой промежутка между двумя соседними штифтами одиннадцатого (или девятого) ряда. То, что первые ряды не совсем заполнены, так что наверху у краев доски недостает штифтов, здесь не существенно. Теперь я сверху, с середины доски, пускаю стальной шар, имеющий 8 *мм* в диаметре, так, чтобы он как раз попал на средний штифт верхнего ряда; теперь судьба должна решить, катиться ли ему дальше направо или налево. В обоих случаях он сейчас же натыкается на штифт второго ряда и снова должен выбирать себе дорогу направо или налево. Этот выбор и многие последующие фактические происходят быстрее, чем я могу об этом рассказать. И вот шар прошел весь путь, все 40 рядов, причем он каждый раз натыкался на штифт и, после неприметного короткого колебания, находил себе выход вправо или влево. По окончании пути можно установить, сколько раз шар поворачивал направо и сколько раз налево. Потому что то положение покоя, которое он теперь занимает внизу на расстоянии четырех штифтов вправо от середины, показывает, что число выборов в пользу правой стороны было на восемь единиц больше, чем в пользу левой (так как горизонтальное расстояние середины шара от средней линии доски увеличивается на половину расстояния между штифтами

при каждом выборе в пользу правой стороны). Так как всего имеется 40 рядов, то, очевидно, было произведено 16 решений в пользу левой и 24 в пользу правой стороны. Все явление представляет собою модель сорокакратного повторения альтернативы с признаками $+\frac{1}{2}$ («направо») и $-\frac{1}{2}$ («налево»), причем результатом повторения или признаком коллектива, образованного 40-кратным связыванием, является только сумма отдельных признаков. Сумма из 24 слагаемых $+\frac{1}{2}$ и 16 слагаемых, равных $-\frac{1}{2}$, и дает число 4, которым определяется положение шара в конце пути.

Колоколообразная кривая

Представим себе теперь, что мы предприняли какое-нибудь физическое наблюдение или измерение, на которое имеют влияние 40 независимых друг от друга источников ошибок. Каждый отдельный из этих источников дает повод к положительной или отрицательной ошибке, размер которой пусть всегда равняется половине какой-нибудь определенной единицы измерения. Тогда ошибка, получающаяся в результате наблюдения, точно соответствует тому, что выражает конечное положение нашего стального шара на нижнем краю доски Гальтона. Результат наблюдения ровно на столько единиц слишком велик или слишком мал, на сколько штифтовых промежутков вправо или влево от середины расположен шар. Если мы теперь хотим посмотреть, что случится, когда мы проделаем целый ряд наблюдений, а не только одно, то мы должны спустить по доске целый ряд шаров друг за другом. У меня здесь 400 совершенно одинаковых, точно сработанных стальных шаров, и вы видите, как они друг за другом ищут себе

дорогу между штифтами. По прошествии нескольких минут все шары пробежали свой зигзагообразный путь и покоятся красивыми столбиками у нижнего края доски, каждый в том отделении, в какое он попал после своего последнего отклонения в сороковом ряду. Теперь можно охватить одним взглядом весь результат 400-кратного повторения единичного опыта (который сам состоит из 40 независимых опытов): мы видим, что большая часть шаров лежит в средних отделениях, там, где суммарное отклонение от середины составляет не более одного или двух делений, и что затем число шаров в ту и другую сторону приблизительно симметрично убывает. Уже издали можно узнать характерную форму «колоколообразной кривой», которая изображает собою распределение шаров по различным расстояниям и вместе с тем распределение образованного сорокакратным связыванием коллектива.

Лаплас первый правильно рассчитал распределение для данного случая связывания большого числа одинаковых альтернатив и таким образом теоретически нашел форму этой колоколообразной кривой, которую в настоящее время также часто называют кривой Гаусса. Собственно говоря, по существу это та же задача, которую рассматривал Бернулли и с которой мы выше познакомились в другой форме, когда вопрос шел о числе выпадений «герба» при большом числе бросаний монеты. Но в то время как Бернулли в законе больших чисел (как он потом был формулирован Пуассоном) отмечал только частное свойство результирующего распределения, Лапласу удалось вычислить это распределение в полном виде. Математически оно представляется так называемой функцией «*e* в степени ми-

нус x^2», т. е. ординаты колоколообразной кривой уменьшаются от середины к краям таким образом, что их (взятые с обратным знаком) логарифмы относятся между собой как квадраты расстояний от середины. При этом следует заметить, что существует не одна колоколообразная кривая, а бесконечно много, и отличаются они друг от друга более или менее тонкой формой. В случае с доской Гальтона мера этой субтильности, или, как обычно говорят, мера точности, которая по существу зависит от числа рядов гвоздей, поддается точному вычислению. При расчете приходится пользоваться исключительно правилами сложения и умножения вероятностей, которые, как мы знаем, всегда применяются при смешивании и связывании коллективов.

Закон Лапласа

Общая теорема, на которой основывается теория ошибок Гаусса, заключается в том, что колоколообразная кривая, которую так явно обрисовывают нам шары гальтоновой доски, выражает собою результирующее распределение во всех тех случаях, когда коллектив, о котором идет речь, путем связывания и образования сумм произошел из очень многих исходных коллективов. При этом нет необходимости в том, чтобы отдельные исходные коллективы были простыми альтернативами, а также чтобы все они имели одинаковые значения признаков и одинаковое распределение. Результирующее распределение всегда будет иметь характер колоколообразной кривой, если только конечный коллектив мы будем строить путем «связывания» очень большого числа исходных коллективов и затем будем «смешивать» так, чтобы в качестве окончатель-

ного признака осталась только сумма исходных признаков. Вы видите, какое глубокое значение эта теорема имеет для теории ошибок наблюдения. Если только допустить совместное действие большого числа источников ошибок при каждом отдельном наблюдении, то из этого одного уже следует, что вероятность определенной величины суммарной ошибки выражается ординатой соответствующей колоколообразной кривой. В этом смысле имеет место определенный «закон ошибок», которому следуют случайные ошибки наблюдения и который служит исходной точкой теории ошибок и метода «выравнивания» Гаусса; конечно, тут остаются открытыми много принципиальных вопросов, о которых я здесь не могу подробно говорить, как, напр., вопрос о практическом вычислении «меры точности», которая для каждого ряда наблюдений должна иметь определенное значение, и т. д.

Приложения теории ошибок

Гаусс применял свою теорию прежде всего к геодезическим и астрономическим измерениям, и в этих областях основанные на его теории методы расчетов, впрочем, еще до Гаусса в значительной мере известные Лежандру, служат необходимым вспомогательным орудием для каждого практика. Теория, однако, оправдывает себя и далеко за этими пределами во многих таких случаях, где, собственно, речь не может итти об «ошибках» наблюдения, а только о колебаниях или о взаимных отклонениях результатов. Если, например, измерять рост очень большого числа лиц одного и того же возраста, то получится ряд значений, которые, если мы их, округляя, выразим в полусантиметрах, вряд

ли будут содержать еще какие-либо ошибки измерения. Различия между результатами измерения могут быть рассматриваемы как случайные колебания, происхождение которых может быть приписано разного рода причинам. И вот, если более подробно проанализировать относительные частоты отдельных значений роста, то обнаруживается, что они тоже следуют закону кривой Гаусса. В этом нет ничего удивительного, так как мы ведь видели, что такая форма распределения всегда должна получиться в результате, если рассматриваемый признак является суммой независимых друг от друга случайно меняющихся отдельных величин. Таким образом закон Гаусса и целый ряд выведенных из него следствий находят себе применение в более широких областях биологических и других статистических исследований, хотя бы там и не шла речь об ошибках наблюдения в первоначальном смысле. С другой стороны, нельзя, как это часто делалось, преувеличивать область применений теории ошибок. Не все существующие где бы то ни было колебания следуют закону кривой Гаусса, и нет ничего более вздорного, чем предположение, что случайные отклонения от среднего значения могут быть только там, где распределение соответствует этому закону. Вышеупомянутая английская школа «биометриков», основанная К. Пирсоном, правильно подчеркивает, что закон Гаусса не есть последнее слово мудрости в статистике. И если иногда исследования, исходящие из кругов Пирсона, лишены более глубокого обоснования со стороны теории вероятностей, то никак нельзя отказать им в том, что они своим более свободным пониманием сущности статистического распределения способствовали успехам биологической ста-

тистики. Желательно было бы, чтобы наконец и в Германии были предприняты более широкие работы в этом направлении.

Этими указаниями я хочу закончить главу о применении теории вероятностей к статистике. К некоторым вопросам, связанным с основаниями теории ошибок, я еще вернусь в следующей, последней главе.

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Теперь мне остается подробно рассказать только еще об одной области приложений теории вероятностей, которая открыта приблизительно полстолетия тому назад, а в настоящее время получает все более и более возрастающее значение и как раз в принципиальном отношении должна возбуждать большой интерес. Я имею в виду ту роль, которую понятие вероятности в настоящее время играет в теоретической физике, — роль, созданную гениальной идеей Больцмана. Идея эта заключалась в том, чтобы дать форму вероятностного утверждения одной из самых важных теорем физической науки, так называемому второму закону учения о теплоте.

Для того чтобы пояснить вам обстоятельства, о которых здесь идет речь, мне не нужно предполагать особых познаний в области физики. Даже для того, кто этими познаниями обладает, лучше будет первое время не принимать во внимание предметного содержания теоремы, а сосредоточиться на тех логических формах, в которых она находит себе выражение.

Второй принцип термодинамики

Классическая термодинамика, основанная Робертом Майером, Джоулем и, прежде всего, Карно, привела

к познанию, что при тепловых процессах на ряду с тем, что называют энергией, приходится иметь дело еще с другой характеризующей состояние величиной, с так называемой энтропией, и что для нее имеет место закон, который в качестве второго принципа должен быть поставлен на ряду с первым принципом сохранения энергии: при каждом наблюдаемом процессе энтропия увеличивается. Со времени знаменитой работы Больцмана 1866 года этот принцип можно формулировать так: с чрезвычайно большой вероятностью следует ожидать, что значение энтропии увеличится; сколько-нибудь значительное уменьшение энтропии обладает чрезвычайно малой вероятностью. Если мы переведем это на язык, заменяющий слово «вероятность» его определением, то мы получим следующее утверждение: если один и тот же физический процесс повторять неограниченное число раз, то с очень большой относительной частотой будет наступать случай увеличения энтропии, и только очень редко — противоположный. Правда, многие моменты здесь еще требуют более подробного разъяснения, и прежде всего вопрос о том, что̀ следует разуметь под «одним и тем же» процессом, как связана величина вероятности с величиной ожидаемого увеличения или уменьшения энтропии, и т. д. Однако не может быть сомнения в том, что смысл этой формулировки заключается в некотором определенном утверждении о частоте того или иного исхода опыта. Вряд ли здесь приравнивание вероятности относительной частоте при неограниченном повторении опыта встретит какие-нибудь возражения. Физик Смолуховский, которому мы обязаны многими ценными работами по физической статистике, говорит в одном месте по

этому поводу: «математическая вероятность есть относительная частота наступления известных вызывающих к себе внимание событий». Это есть (хотя и несколько неточное) наше определение вероятности при помощи частоты, которое мы противопоставили классическому определению, основанному на равновозможности.

Детерминизм и вероятность

Что же в теории Больцмана нового, что в ней кажется или казалось революционным? На этот вопрос легко ответить, если подумать о том, какое представление мы создали себе в течение столетий о так называемых законах природы. «Все тела падают на землю с одинаковым ускорением», говорит Галилей. «Каждый световой луч, вступая в более плотную среду, отклоняется в сторону перпендикуляра», гласит часть закона преломления Снеллиуса. «Два шарика, заряженных одноименным электричеством, отталкиваются друг от друга», такова часть формулировки закона притяжения Кулона. Во всех этих случаях с полнейшей достоверностью предсказывается наступление определенного явления при точно установленных предпосылках. Закон не гласит «большинство тел падает» или «тела падают почти всегда» по направлению к земле, утверждение имеет вполне детерминированный характер, который, по крайней мере на первый взгляд, не может быть приведен ни в какую связь с понятием вероятности. «Согласно вечным, железным, великим законам все мы должны завершить круг нашего бытия»—этими словами Гёте выражает убеждение в однозначной предопределенности явлений природы.

Первый пример детерминистического объяснения обширной области фактов дала механика Ньютона в том виде, как она была изложена в «Principia mathematica». На протяжении почти 200 лет картину мира не умели представлять себе иначе, как в форме, основанной на принципах Ньютона, — в этом пункте даже взгляд Гёте совпадает со взглядом жестоко оспариваемого им в других отношениях Ньютона. Самое крайнее выражение детерминизм Ньютона получил в «математическом демоне» Лапласа, который будто бы в состоянии, при помощи одной только своей неограниченной способности к математической дедукции, предсказать течение всех мировых событий, как только ему станут известными все величины, характеризующие состояние мира в данный момент. Тот взгляд, что нечто подобное должно быть возможным по крайней мере для всей неодушевленной природы, а может быть также и для мира растений и животных — иногда при дополнительном допущении, что и далекое прошлое может оказывать свое влияние, — постепенно сделался твердым убеждением всех естествоиспытателей. Только поведению человека, в соответствии с религиозным учением о свободе воли, по мнению большинства, представлялась некоторая свобода выбора. Так и Гёте в только что приведенном стихотворении продолжает: «Один только человек способен к невозможному; он различает, выбирает и судит». В исключительном положении человека мы, по крайней мере инстинктивно, безусловно убеждены, и это решительным образом влияет на наш взгляд касательно возможности «случайных» процессов.

Нам представляется совсем не удивительным, что число смертных случаев или самоубийств в Германии нельзя

точно предвычислить для ближайших лет, примерно так, как можно точно предсказать время каждого лунного затмения. Потому что в этих двух вопросах посредственно или непосредственно участвует свободная воля человека, например в отношении образа жизни, выбора места жительства, поведения в моменты опасности и т. д. Если даже во всех наших решениях принимают определяющее участие внешние обстоятельства, то все же это влияние мы не считаем принудительно однозначным. Наоборот, более старые авторы, как, например, английский историк Бокль, ничему так не удивлялись, как резко выраженному однообразию статистических чисел и вытекающей отсюда возможности предсказания в не слишком широких пределах. И в азартных играх, процесс которых стоит гораздо ближе к явлениям неодушевленной природы, тоже может быть обнаружено вмешательство свободной воли. Мы поднимаем рукой бокал, содержащий игральные кости, делаем определенное движение при его встряхивании и т. д. Лотерейный билет вынимается из колеса прусским правительственным чиновником, и до последнего момента остается неизвестным во всех отношениях, какой из билетов схватит его рука. То обстоятельство, что подобные явления протекают «случайно», т. е. управляются законами теории вероятностей, есть познание, к которому мы с давних пор более или менее привыкли. Ну а собственно механические и физические процессы, в которых не участвует человек, явления неодушевленной природы, они, вероятно, имеют принципиально иной характер? Механический ткацкий станок производит свои сложные движения с безошибочной регулярностью; что же, его продукция, зрелый плод его ткацкого искус-

ства, — так уже неизменно однородна? Если мы в смысле так называемой кинетической теории газов примем, что данная масса газа есть огромное скопление отдельных невидимо малых и движущихся друг относительно друга атомов, то мы считаем необходимым мыслить, что эти движения происходят закономерным, совершенно однозначно предопределенным образом. Наша интеллектуальная совесть восстает против допущения, что такими явлениями может управлять случай или «законы случая».

Механизмы случая

Однако это противодействие, это сопротивление интеллекта при ближайшем рассмотрении оказывается, как это часто бывает, предрассудком, который никак не может быть сохранен, если поглубже заглянуть в сущность дела.

В чем же заключается разница между «чисто механической» системой движущихся друг относительно друга атомов или молекул, заключенных в замкнутый сосуд, и механизмом азартной игры? Рассмотрим, например, такой испытанный путь получения «чисто случайных» результатов, как тираж лотереи. Существенное содержание игры заключается в следующем. Нумера от 1 до, скажем, 100 000 отпечатываются на отдельных, совершенно одинаковых билетиках, которые по возможности однообразно скатываются в трубочки; эти трубочки ссыпают в большой сосуд, находящийся в постоянном вращательном или каком-либо ином движении. Наконец, в сосуд опускается рука и вынимает оттуда наудачу одну трубочку. Главное внимание должно быть обращено на то, чтобы при движении сосуда трубочки перемешивались неприметным образом. Каким путем от-

дельная трубочка в конце концов схватывается и вынимается из сосуда, это не имеет никакого значения, если только производящий тираж лишен возможности подметить какие-либо различия между трубочками. Но именно это последнее условие с особым совершенством выполняется, если тираж производится не разумным существом, а каким-нибудь автоматом, который, после достаточного перемешивания сосуда, заставляет его выбросить одну трубочку, хотя бы через воронкообразное отверстие. И на самом деле часто уже предлагалось, во избежание обмана, т. е. для полнейшей гарантии «случайности», механизировать весь процесс тиража.

Возможность этого не подлежит сомнению. Такого рода тиражная машина, приводимая в движение электромотором, представляла бы собою следующее: с одного конца в аппарат вводится длинная бумажная лента, которая автоматически заполняется печатными знаками, разрезается, скатывается и в виде ста тысяч одинаковых трубочек падает в сосуд; последний подвергается достаточно сильному перетряхиванию, после чего выбрасывает через предварительно устроенное отверстие одну трубочку, дающую выигрыш (или первый выигрыш). Таким образом мы имеем перед собою совершенно замкнутую механическую установку, которая, будучи многократно приведена в действие, ни в коем случае не даст всегда одного и того же результата, но, как мы совершенно уверены, будет исключительно по законам случая, т. е. в согласии со свойствами коллектива, приносить выигрыш то одному, то другому нумеру. Можно представить себе устройство еще более простого автоматического механизма случая, дополнив уже упомянутую игру Bajazzo мотором, механически поднимающим

спустившийся шар (причем падение шара игрок теперь производит, нажимая кнопку). Бокал, улавливающий шар, должен быть, конечно, неизменно укрепленным для того, чтобы вообще налицо была азартная игра, как это вытекает из наших прежних рассмотрений.

Случайные колебания

Если мы таким образом убедились, что автоматический механизм может давать результаты, подверженные случайным колебаниям, то у нас нет больше оснований возражать против аналогичного допущения для молекул газа. Однако можно в этом рассуждении сделать еще один шаг дальше. Мы выше говорили о том, что машина вроде механического ткацкого станка по установившемуся взгляду необходимо должна продуцировать один кусок ткани в точности равным другому. Но правилен ли вообще этот взгляд? Если мы рассмотрим два произведения одного и того же ткацкого станка несколько более детально, чем это можно сделать невооруженным глазом, то мы, без сомнения, найдем — даже если мы сперва, простоты ради, отвлечемся от недостаточной однородности материала — бóльшие или меньшие отклонения в ширине петель, в углах, которые образуют между собою нити, и т. д. В сущности, этот ряд последовательных кусков ткани даст нам даже двойной ряд колебаний: мы можем рассматривать, с одной стороны, различия между соседними петлями *одного и того же куска* и, с другой стороны, те различия, которые обнаруживаются в соответственных местах *различных* кусков. И такие отклонения, такие ошибки встречаются в каждом, даже самом точном процессе машинной работы. Когда мы говорили о приложениях статистики в про-

мышленности, то я указывал, что при проверке стальных шаров, предназначенных для шарикоподшипников, с успехом пользуются теорией ошибок Гаусса. Здесь, следовательно, теория, построенная на рациональном понятии коллектива, применяется к результату одного из самых совершенных механических процессов, какие только знает современная техника, несмотря на то, что этот результат, т. е. совершенно автоматически созданный стальной шарик, должен был бы быть вполне детерминирован основными законами механики. Как раз то, что детерминистический взгляд на явления природы должен был бы рассматривать, как наиболее однозначно определенное,—продукция точной машины — оказывается при ближайшем рассмотрении чем-то случайно колеблющимся. Но существует ли в таком случае вообще повторное явление, которое действительно точно совпадало бы с предсказаниями механики или аналогичной физической теории. Было бы потерей времени спорить о том, протекает ли, например, у математического маятника каждое колебание в точности подобно другому колебанию. Если бы мы нашли такой процесс, при котором нам не удастся обнаружить никаких отклонений, то разумно было бы допустить, что более точными методами измерения такие колебания все же могут быть установлены, и что — в согласии со всем тем, что мы знали до сих пор,—отклонения обладают свойствами коллектива и подчиняются всем законам теории ошибок.

Малые причины, большие следствия

Однако бросается в глаза одно различие между поведением тиражной машины и только что указанными «неточностями» в работе любых производственных машин.

В последнем случае можно предсказать существенный результат механического процесса (построение машины и рассчитано на этот результат), и только небольшие различия отдельных результатов между собой подлежат законам случая. В автоматическом же тиражном приборе дело обстоит так, что все существенное решается случаем. В такой формулировке содержится еще нечто субъективное, обусловленное только той практической целью, которой призвана служить машина. О машине, предназначенной для заколачивания ящиков и в которой отдельные гвозди, как в нашей тиражной машине, вступают в действие в случайной последовательности, мы, конечно, не скажем, что она дает существенно случайные результаты, несмотря на то, что здесь механические обстоятельства в точности те же, что и в предыдущем случае. Можно, с чисто механической точки зрения, не принимая во внимание цели, которую преследует данное приспособление, т. е. независимо от того, идет ли речь о безразличном выборе гвоздей для ящиков или об имеющем существенное значение выборе лотерейных трубок, установить характерную особенность «собственно» случайных машин. Они характеризуются тем, что обнаруживающиеся в их процессах от случая к случаю различия не носят характера малых отклонений или неточностей, но всегда оказываются не ниже некоторой определенной меры. Так, при двух тиражах нумера билетов, на которые пали первые выигрыши, отличаются друг от друга по меньшей мере на единицу, если только случайно они не оказались в точности совпадающими. Напротив, диаметр сработанного машиной стального шарика может обнаруживать сколь угодно малую ошибку по отношению к имеющейся в

виду нормальной величине, и ошибки, превышающие некоторую определенную небольшую величину, практически вообще не встречаются. Если теперь рассудить, что процесс движения протекает в каждом механизме, вначале по крайней мере, приблизительно детерминированно—в тиражной машине, например, вплоть до свертывания отпечатанных билетов — и во время этого частичного периода могут быть обнаружены только незначительные колебания, то мы придем к следующего рода характеристическому признаку «случайных машин»: из первоначально небольших, может быть, исчезающе малых неточностей в этих машинах с течением процесса развиваются большие конечные различия механического результата.

Лозунг, которым мы, следуя физику Смолуховскому, лучше всего можем охарактеризовать это положение вещей, гласит: малые причины, большие следствия. Я не хочу итти так далеко, как это сделал Смолуховский и отчасти уже раньше него Пуанкаре, и рассматривать такое несоответствие между следствием и причиной прямо как определяющее свойство каждого массового явления, к которому применимо исчисление вероятностей. Но для «механизмов случая», т. е. таких приспособлений, которые, не подвергаясь человеческому воздействию, обнаруживают автоматически протекающие повторные явления типа коллектива с конечным числом различных (арифметических) признаков, данная нами характеристика несомненно подходит. Скатанные билеты падают в сосуд в той последовательности, в которой они отпечатаны, и до тех пор, пока сосуд остается неподвижным, располагаются в нем в известном порядке, который приблизительно репродуцир-

ется при повторении всего процесса. Если теперь сосуд принудительно приводится в движение, то уже наличные небольшие различия в положении влияют на то, что «исходные условия» начинающегося процесса движения в разных случаях не совсем одинаковы. Из небольших отклонений в первоначальном положении в течение долгого процесса встряхивания развиваются затем такие значительные различия в позднейших конфигурациях, что первый выпадающий в конце концов билет каждый раз оказывается совсем другим. Еще гораздо яснее это явление выражено в опыте с доской Гальтона или, что для нас одно и то же, в игре Bajazzo: когда шар попадает на первый штифт, то неприметно малое отклонение вправо или влево решает вопрос о том, передвинется ли шар на пол-деления в ту или другую сторону. У второго штифта, на который попадает шар, это положение вещей повторяется, причем отнюдь не следует думать, что здесь продолжают влиять только колебания первоначальных исходных условий. Напротив, весьма правдоподобно, что постоянно обнаруживаются новые влияния извне, напр. движение воздуха, сотрясения и т. д., которые все сходны между собой в том, что в отдельности представляют собою очень «малые причины», но в своей совокупности решают альтернативу о дальнейшем движении шара вправо или влево от препятствия.

Кинетическая теория газов

Нетрудно дополнить рассуждения, которые мы связали с «механизмом случая», в направлении, дающем возможность рассмотреть сущность статистических процессов в физике. Старейшим примером такого рода, в известном смысле характерным почти для всех других случаев,

является картина «идеального» газа, как ее нам рисует так называемая кинетическая теория газов. В данный момент я еще не буду считаться с тем, что взгляды физиков на самый предмет уже многократно изменялись и что за теорией газов Больцмана признается почти что только историческое значение. Как известно, здесь делается допущение, что масса газа заполняет пространство не непрерывно, как это можно было бы предположить, опираясь на непосредственное наблюдение; но что «заполненное газом» пространство пересекается весьма многими и весьма малыми атомами или молекулами, которые, через короткие промежутки времени, сталкиваются друг с другом и при этом изменяют свой, вообще говоря, прямолинейный путь. Если принять за признак такой молекулы ее скорость в данный момент или, точнее, три компоненты скорости в направлениях координатных осей, то оказывается целесообразным, т. е. хорошо совпадающим с наблюдениями, рассматривать совокупность молекул, как коллектив, и применять к ней правила исчисления вероятностей. При этом, если мы хотим добиться согласия с опытом, мы не можем произвольно устанавливать размеры и число приходящихся на единицу объема молекул, а также и исходные распределения. Для нас важно, прежде всего, ознакомиться с некоторыми числовыми данными.

Согласно обычным допущениям, к которым нас, как уже сказано, вынуждает требование согласия с фактами, один кубический миллиметр содержит при нормальных условиях не менее 30 000 биллионов газовых молекул. Величина их такова, что три миллиона молекул, положенных друг за другом, дают длину в 1 *мм*. Средняя скорость составляет несколько сот метров в секунду;

пройдя путь приблизительно в одну десятитысячную миллиметра, молекула отклоняется благодаря столкновению; в секунду происходит около 5 миллиардов таких столкновений. Мы видим, что выражения «очень много», «очень маленький» и т. д. уже находят себе оправдание. Понятно также, что здесь хорошо оправдываются правила исчисления вероятностей, так как приходится иметь дело с таким огромным числом элементов, как ни в одном другом случае.

Как же, однако, здесь дело обстоит с лозунгом «малые причины, большие следствия?» Каким образом сказывается здесь решающий признак механизма случая? Для того чтобы в этом разобраться, мы должны из прежних данных вычислить еще только одно отвлеченное число.

Диаметр молекулы, как я уже сказал, равняется одной трехмиллионной доле миллиметра, «свободный пробег», т. е. отрезок пути, в среднем проходимый без столкновений, примерно одна десятитысячная, т. е. в 300 раз больше. Геометрические отношения, следовательно, таковы же, как если бы шары одного сантиметра в диаметре, пройдя в среднем путь в 3 метра, сталкивались друг с другом. Теперь ясно, что исчезающе малое отклонение в направлении движения должно оказать решающее влияние на последствия столкновения. Если, например, шар диаметром в один сантиметр движется вдоль линии центров по направлению к шару той же величины, который мы предположим неподвижным на расстоянии трех метров, то вследствие упругого удара шар отбрасывается назад к исходной точке. Если же отклонить направление движения только на величину, немного меньшую девяти дуговых минут (т. е. 0,0004 окружности) от прямой, соединяющей центры шаров, то из законов соударения

следует, что рикошетный путь будет наклонен под углом в 45° к первоначальному, так что движущийся шар на обратном пути пройдет на расстоянии 3 метров от исходной точки. При 16 дуговых минутах отклонения шар отклонился бы уже на прямой угол от первоначального направления, а при 23 минутах не произошло бы никакого столкновения, и шар без задержки пролетел бы мимо.

Только что приведенные результаты, правда, следуют только из самого старого, принятого еще Больцманом, но с тех пор давно оставленного допущения, что молекулы имеют в точности шарообразную форму и при столкновениях ведут себя как совершенно упругие тела. Однако эти результаты все же очень удобны, чтобы показать нам чрезвычайную чувствительность процесса движения молекул по отношению к небольшим неточностям. Если подумать о том, что согласно более новым, впрочем тоже уже по большей части устаревшим, представлениям каждая молекула газа содержит то или иное число очень быстро движущихся друг относительно друга электронов, то только усилится впечатление, что результат столкновения очень сильно зависит от малых и мельчайших причин. Потому что, если электроны движутся вокруг атомного ядра со скоростями чрезвычайно большими по сравнению со скоростью движения всей молекулы, то малейшее изменение в величине или направлении скорости движения должно до основания изменить относительное расположение частей атома в момент столкновения. Здесь с гораздо бо́льшим правом, чем в механизмах азартных игр, можно говорить о «малых причинах и больших следствиях».

Предоставленное само себе множество движущихся газовых молекул таким образом ничем принципиально

не отличается от автоматической тиражной машины или Гальтоновой доски (игры Bajazzo) с автоматическим подъемом скатившегося шара. То, что существует кинетическая теория газов, построенная на понятии вероятности и дающая хорошо согласные с опытом результаты, нисколько не более удивительно, чем применимость исчисления вероятностей к проблемам азартных игр. Наоборот, особенно полное согласие с опытом в данном случае становится еще более понятным вследствие следующих двух обстоятельств: во-первых, исключительно большого числа элементов, с которыми приходится иметь дело в теории газов, и, во-вторых, чрезвычайно сильно выраженного несоответствия между причинами, вызывающими различия в результатах удара, и их следствиями. Как бы то ни было, мы не в праве односторонне, в одном только данном случае теории газов усматривать противоречие с законом причинности или хотя бы только говорить о неудовлетворенности нашей потребности в каузальном объяснении физических явлений.

Порядок величины «невероятности»

Может быть, вы возразите мне, что допущению статистической концепции определенного физического закона противостоят не только принципиальные сомнения, но и чисто практические. Каким же образом можно когда-либо получить уверенность в правильности такого рода утверждения?

Разве дело не обстоит так, что физические наблюдения определенно заставляют нас признать энтропию всегда увеличивающейся или, скажем, увеличивающейся наверняка при таких-то определенных условиях? Тот, кто недостаточно знаком с делом, будет склонен пред-

положить, что это, так сказать, вопрос факта — можем ли мы наверняка рассчитывать на рост энтропии, или нет, и что в последнем случае на основании опыта можно будет указать по меньшей мере такие условия, при которых следует ожидать ее увеличения. Для того чтобы выяснить имеющиеся здесь обстоятельства, я должен несколько подробнее рассмотреть понятие энтропии и при этом еще раз вернуться к приведенным уже «большим числам» газовых молекул, и т. д.

Согласно представлениям кинетической теории газов, в наполненном воздухом кубе с ребром в 1 *см* содержатся, как я уже говорил выше, 30 триллионов оживленно движущихся молекул, которые в каждый данный момент более или менее равномерно заполняют объем в 1 $см^3$. И вот энтропия — также в рамках кинетической теории — определяется в своих существенных чертах, как некоторая мера равномерности этого распределения. На каждый отдельный из 1 000 тех мельчайших кубиков величиной в один кубический миллиметр, на которые распадается весь рассматриваемый куб, приходится в среднем 30 000 миллионов молекул. И вот, величине, которая называется энтропией, приписывается, следуя Больцману, тем большее значение, чем ближе фактическое распределение молекул к равномерному, при котором на каждый из маленьких кубиков приходится как раз тысячная доля общего числа молекул. Напротив, энтропия мала в тех случаях, когда в распределении молекул имеется бросающаяся в глаза неравномерность, например когда один из маленьких кубиков содержит только половину того числа молекул, которое в среднем приходится на его долю. При этом, конечно, следует учесть и некоторые побочные обстоятельства. Так, предполагается,

что на протяжении всего рассматриваемого объема, т. е. в нашем примере кубического сантиметра, нет никаких заметных физических неравномерностей, так что, например, между отдельными точками этого объема нет никаких различий давления или температуры, подобных тем, какие, конечно, могут быть констатированы на протяжении такого большого объема, как эта аудитория. Затем следует заметить, что для точного определения понятия энтропии, а также для определения величины энтропии в конкретном случае, необходимо рассматривать не только пространственное распределение молекул, но также и распределение их скоростей, что, однако, ничего не меняет в принципиальном отношении.

Если отвлечься от скоростей, то можно сказать: весь наличный опыт показывает, что столь значительное отступление от нормы, как уменьшение числа молекул в кубическом миллиметре наполовину или больше чем наполовину (при соответственном небольшом увеличении в остальных 999 кубиках) не наступает никогда. Статистическая теория, правда, не исключает совершенно возможности этого явления, но объявляет его крайне невероятным. Следует, однако, знать меру невероятности, которую дает теория. К сожалению, я не могу выписать здесь число, выражающее собою эту долю вероятности: число это таково, что после запятой в нем стоит сто миллионов нулей, прежде чем появляется первая значащая цифра. Столь малая величина не поддается никакому представлению, и потому мы попытаемся несколько смягчить наш пример. Поставим только вопрос о вероятности того, что число молекул в угловом маленьком кубике рассматриваемого кубического сантиметра отличается, скажем, по меньшей мере на одну десятитысячную долю

в ту или другую сторону от среднего значения 30 000 миллионов, падающего на каждый кубический миллиметр, т. е. что оно по крайней мере на три миллиона слишком велико или слишком мало. Эту вероятность тоже нельзя выписать в обыкновенной форме, она еще имеет больше 60 нулей после запятой, но о размере ее все же можно создать себе хорошее представление. Если десять раз под ряд участвовать в лотерее, в которой каждый раз конкурирует миллион билетов, то полученная нами вероятность приблизительно равна вероятности выиграть при этом все десять раз главный выигрыш. Каждый нормально мыслящий человек найдет, что между этой степенью «невероятности» и полнейшей невозможностью вряд ли существует практически установимое различие.

Критика теории газов

Я произвел здесь некоторые простые расчеты, связанные с так называемой кинетической теорией газов, только потому, что эта теория представляет собою исторически первый и, повидимому, наиболее известный пример применения понятия вероятности в физике. Однако пример этот по многим причинам не может считаться вполне подходящим. Одна из этих причин была уже упомянута: в настоящее время не верят больше в простые шарообразные молекулы Клаузиуса, Максвелла и Больцмана; создавшееся за последнее десятилетие представление об атомах, как о маленьких планетных системах, созданное Резерфордом и Нильсом Бором, тоже уже оставлено и должно было уступить место более общей, предсказанной Э. Махом, концепции, согласно которой атомам нельзя

приписывать ни времени, ни места в обычном смысле этих слов. Но для нас еще более существенно то обстоятельство, что в области прежней теории газов собственно так и не пришли к полному выяснению логических основ в отношении именно статистических вопросов. Сам Больцман стоял еще одной ногой на почве детерминистической механики и пытался соединить статистическую концепцию второго принципа с описанием процессов столкновения газовых молекул, протекающих полностью в русле ньютоновой механики. Э. Мах правильно возражал на это, что из механических законов никогда не может быть выведено поведение, требуемое вторым принципом.

Критика Маха, направленная против данного Больцманом доказательства второго принципа, настолько важна и так часто, к сожалению, излагалась в совершенно искаженном смысле, что я не могу отказаться от более близкого ее рассмотрения. Мах находит, что «не существует аналога для увеличения энтропии в чисто упругой системе из абсолютно упругих атомов»; что поведение атомов, соответствующее второму принципу, не доказано на основе механических законов. «Да и как бы могла абсолютно консервативная система упругих атомов, при помощи самых искусных математических рассмотрений, которые все же ничего не могут ей причинить, быть вынуждена вести себя, как система, стремящаяся к определенному конечному состоянию?»

Эти возражения, через которые несколько десятилетий тому назад, когда кинетическая теория газов была у физиков в большом почете, надеялись легко перескочить, попадают как раз в самую суть дела. И в самом деле, ни разу еще не удалось и по существу невоз-

можно вывести из законов механики процесс движения, соответствующий требованиям второго принципа, т. е. оказывающий предпочтение тем состояниям, которые могут быть названы «наиболее беспорядочными», вроде, например, равномерного распределения молекул между тысячей отдельных кубических миллиметров нашего прежнего примера.

Среди столь часто сменяющихся в современной физике научных периодов лишь весьма недолго господствовал период «механический», в течение которого царила вера в абсолютную реальность атомов и надеялись, в конечном счете, обойтись законами Ньютоновой механики для объяснения тепловых явлений. Затем постепенно убедились, что здесь существуют неразрешимые противоречия, и тогда начали более или менее явно покидать детерминистическую теорию столкновения молекул, пытаясь заполнить образовавшийся пробел при помощи deus ex machina в лице так называемой «Ergodenhypothese». Я здесь не буду углубляться в эти трудные вопросы, так как надобность в этом могла бы возникнуть только в том случае, если бы я придавал большее значение изложенным указаниям, относящимся к классической теории газов; эти указания, действительно, можно правильно понять только в связи с «Ergodenhypothese». Однако я не собираюсь итти дальше по этому пути, а лучше рассмотрю теперь два примера физической статистики, которые свободны от трудностей теории газов и в которых дело идет не о таких гипотетических и спорных вещах, как газовые молекулы.

Броуново движение

Около ста лет тому назад английский ботаник Броун открыл в некоторых органических жидкостях видимые

под микроскопом маленькие частицы, которые выполняли странные, непрестанные зигзагообразные движения. С тех пор было найдено, что это «Броуново движение» может быть наблюдаемо при самых разнообразных условиях и образует массовое явление, следующее законам исчисления вероятностей. Так как нас интересует только принципиальная сторона дела, то мы можем упростить картину, допуская, что движение частиц происходит исключительно в пределах некоторой горизонтальной плоскости. Мы, следовательно, не принимаем во внимание вертикальных движений или, что то же, рассматриваем только проекцию зигзагообразного движения на горизонтальную плоскость.

Представим себе, например, дно сосуда покрытым прямоугольной сетью прямых, так что оно распадается на большое число, скажем N, маленьких квадратов; тогда мы можем следующим образом установить коллектив: элементом является одно наблюдение Броуновой частицы, признаком—нумер квадрата, в котором она обнаружена. Мы получим хорошие результаты, если допустим, что все эти вероятности имеют одно и то же значение, равное, следовательно, $1:N$. Это допущение можно проверить таким образом: вывести из указанного исходного коллектива другой, элементом которого явится наблюдение некоторого числа, скажем n, частиц с признаком, состоящим из тех n квадратов, где они обнаружены, и затем путем смешивания построить отсюда простую альтернативу, например с признаком: в квадрате № 25 находятся три частицы или иное число частиц. Если сделать ряд микрофотографических снимков всей эмульсии, причем сеть прямых должна быть нанесена на пластинке, то можно сосчитать, с какой относительной частотой

наступает только что указанный признак. Совпадение с результатом вычислений при этом оказывается вполне удовлетворительным. Чтобы точно выполнить предпосылки расчета, нужно было бы, правда, перед каждым снимком сильно перемешивать всю эмульсию, для того чтобы отдельные наблюдения были «независимыми» — так, как это делается при игре в карты или тираже лотерейных билетов. То обстоятельство, что результаты подсчета и без такого перемешивания, без нарушения естественного хода движения хорошо совпадают с теоретически предвычисленными, представляет собою весьма замечательный факт, о котором я должен поговорить подробнее.

Временное течение явлений

Дело в том, что в любой задаче физической статистики наибольший интерес вызывает не пространственная конфигурация явлений, а их последовательность во времени, их временное течение. В броуновом движении под микроскопом наблюдается обычно квадратное поле сетки, и через каждую секунду или иной подходящий промежуток времени подсчитываются частицы, которые в него попадают. Каким образом правила исчисления вероятностей могут быть применены к этому ряду наблюдений? Образуют ли следующие друг за другом числа частиц ряд элементов коллектива, который можно вывести из вышеназванного исходного коллектива? Можно ли их вообще понимать как коллектив? Простое рассуждение уже показывает, что это вряд ли возможно. Вообразим себе, например, появление определенного числа частиц, скажем 7, в одном из квадратов. Если мы исследуем достаточно длинную временную последова-

тельность, то наверно обнаружится определенная относительная частота этого числа 7, по поводу которой можно допустить, что она стремится к некоторому предельному значению. Но если мы каждый раз будем принимать во внимание не только теперешнее состояние, но также и то, которое имелось в том же поле в непосредственно предшествующий элемент времени, то несомненно окажется, что число 7 гораздо более часто следует за числом 6 или 8, чем, например, за числом 1. Вторая аксиома—иррегулярность ряда признаков — таким образом не выполняется для временной последовательности чисел частиц в пределах данного поля. С физической точки зрения это происходит, конечно, оттого, что отдельные частицы в пределах промежутка времени между двумя последовательными наблюдениями не успевают пройти большого пути, так что маленьких изменений числа частиц следует ожидать с бо́льшим основанием, чем больших. С точки зрения теории вероятностей мы должны сказать, что числа частиц, хотя и не образуют коллектива, но каким-то образом могут быть приведены в связь с понятием коллектива. Нетрудно усмотреть, как это может быть сделано; я сперва поясню это на простейшем примере азартной игры, на игре в орлянку.

Вероятностное последействие

Если мы будем фиксировать результаты этой альтернативы в виде чисел 0 и 1, то последовательность опытов даст нам ряд чисел, состоящий из нулей и единиц и обладающий всеми свойствами коллектива. В частности, число 1 в этом ряду встречается так же часто вслед за 0, как и после 1. Образуем теперь сумму двух сле-

дующих друг за другом чисел нашего ряда, т. е. сложим между собою сперва первый и второй, затем второй и третий, потом третий и четвертый результаты, и т. д. Таким образом из наблюденной последовательности 10111010011000101 получается последовательность сумм 1122111012100111..., состоящая, конечно, из нулей, единиц и двоек. Никого не удивит, что эта последовательность, точно так же как и первоначальная, обнаруживает предельные значения относительных частот. Однако здесь все же, с другой стороны, оказывается, что иррегулярности больше не существует, потому что число 2 не может следовать за числом 0 или число 0 за числом 2. 2 на пятом месте показывает, что пятым и шестым результатом были единицы, 0 на шестом месте — что шестой и седьмой опыт дали в результате 0, что очевидно несовместимо с предыдущим. Здесь мы имеем перед собою типичный пример числового ряда, полученного из коллектива, из наблюдения случайного ряда явлений, который частично еще обладает свойствами коллектива, но не имеет больше характерного свойства (полной) иррегулярности. Математический анализ следующим образом справляется с этим случаем.

Сперва рассматривается коллектив, выведенный из первоначального, элементом которого является соединение трех исходных элементов, и притом элементов последовательных, т. е., например, от первого до третьего, от четвертого до шестого, и т. д. В качестве двухмерного признака элемента мы выбираем две суммы последовательных результатов наблюдения, т. е. в пределах каждой тройки сумму первого и второго и сумму второго и третьего. Применяя известные правила, мы находим вероятность того, что в рассматриваемой последователь-

ности элементов появляется комбинация 0—1, или 1—0, и т. д. Комбинации 0—2 и 2—0, согласно вышесказанному, невозможны. Другой коллектив, приводящий к аналогичным расчетам, мы получаем соединением исходных элементов с нумерами от 2 до 4, от 5 до 7, от 8 до 10, и т. д. (вместо 1—3, 4—6 и т. д.), третий— если соединить элементы от 3-го до 5-го, от 6-го до 8-го, и т. д. Эти три коллектива имеют одно и то же распределение, т. е. в каждом из них вероятность определенной комбинации двух последовательных сумм, например 2—1, одна и та же. Ту же величину дает и предельное значение, к которому стремится относительная частота этой комбинации в последовательности всех сумм из двух соседних элементов исходного коллектива. Это значение, вообще говоря, иное, чем соответствующее значение для комбинации 1—1 или 0—1, и это обстоятельство не дает нам возможности прямо говорить, в смысле нашего прежнего определения, о «вероятности появления 1». Смолуховский, в первый раз подробно изучивший это явление на примере броунова движения, ввел для него очень наглядный термин, который, правда—как это часто бывает с такими суггестивными наименованиями, — может дать повод также и к очень неправильным представлениям. В этих случаях говорят о «вероятностном последействии» и хотят этим сказать, что несмотря на случайный характер в целом, здесь все же имеется некоторое влияние предшествующих наблюдений на последующие.

Время пребывания и его предсказание

Возвратимся теперь к нашей проблеме броунова движения. По аналогии с только что приведенным приме-

ром, мы можем рассматривать координаты определенной частицы в известный момент времени как сумму, составленную из начальных значений этих координат и тех скачкообразных изменений, которые они претерпевают в промежутках между отдельными наблюдениями. В качестве нового исходного коллектива, существенно важного для исследования временного течения броунова движения, мы должны ввести: констатирование изменения координаты, скачка, с признаком величины этого скачка, точнее — разности координат в том или другом направлении. Согласно этому мы должны считать известными вероятности того, что координаты мгновенного положения частицы в течение установленного промежутка времени претерпят изменения той или иной величины. Теперь мы построим из этого и прежде приведенного исходного коллектива производный коллектив со следующим элементом: наблюдается совокупность n частиц на протяжении k моментов времени. Признаком сперва является совокупность $2nk$ координат всех частиц, затем, после соответствующего смешивания, относительное число $x:k$ тех моментов времени, в которые, например, три частицы находятся в определенном поле (получают определенные значения координат). Другими словами это означает: мы можем вычислить вероятность того, что, например, в сотой части наблюдаемых моментов времени три частицы находятся в определенной выделенной микроскопом, как говорят, «оптически изолированной» части пространства. Результат этого расчета чрезвычайно характерен и будет сейчас кратко приведен.

Оказывается, что если—соответственно с фактическим положением — принять число частиц n и число полей N очень большими, а также допустить достаточно длитель-

ное время наблюдения, т. е. большое k, то среди всех возможных (т. е. лежащих между 0 и 1) значений относительного «времени пребывания» $x:k$ всегда одно определенное значение обладает подавляющей вероятностью, почти не отличающейся от 1. Я указал выше, как на основании первого исходного коллектива можно вычислить вероятность того, что любой из N маленьких квадратов (мы говорили там о № 25) в какой-либо момент будет содержать ровно три частицы. Эта вероятность есть, конечно, правильная дробь (например, как в случае опытного ряда Сведберга, о котором я еще подробнее поговорю, $w=0{,}116$). И вот, результат дальнейшего расчета, при котором учитывается и второй исходный коллектив (вероятности скачков), приводит нас к тому, что при рассмотрении достаточно длинной последовательности моментов времени с исключительно большой вероятностью можно ожидать значения, близкого к $x:k=0{,}116$. Для того чтобы иметь возможность выразить этот результат коротко и точно, полезно ввести некоторые обозначения.

Найденная теоретическим путем величина вероятности $W=0{,}116$ была получена при помощи рассуждений, по существу относящихся к комбинаторике, на основании простого допущения, что вероятность для каждой данной частицы оказаться находящейся в таком-то определенном из общего числа полей равна в точности $1:N$. Поэтому мы назовем ее «комбинаторной вероятностью» числа частиц 3. Для правильной дроби $x:k$, т. е. частного от деления числа x тех моментов времени, в которые наблюдались три частицы, на общее число k всех моментов наблюдения, мы уже употребляли выражение «относительное время пребывания». Здесь имеется в виду,

конечно, время «пребывания» числа 3 в рассматриваемом поле, но отнюдь не время пребывания трех определенно индивидуализированных частиц. Теперь мы можем резюмировать результат расчета следующим образом: можно почти с достоверностью ожидать, что относительное время пребывания числа 3 в поле приблизительно равно комбинаторной вероятности числа частиц 3; для сильно отличающихся от нее значений «времени пребывания» имеется только исчезающе малая вероятность. Эта теорема имеет характерную форму всех утверждений, свойственных физической статистике; тут никогда не делается детерминированного утверждения о ходе будущих явлений, как в причинно-построенных разделах естественных наук, например в классической механике, но устанавливается с полною точностью некоторый определенный ход событий, наступления которого следует ожидать с подавляющей вероятностью. При этом порядок величины соответственной «невероятности» оказывается таким же, какой был нами указан выше, в связи с вопросами теории газов.

Прибавлю еще два кратких замечания. В тот расчет, результат которого мы сейчас обсуждаем, входят определенные допущения относительно распределения второго из наших исходных коллективов. Т. е. для проведения расчета необходимо знать, каковы вероятности различных «скачков», претерпеваемых координатами. Однако в качественном отношении результат становится совершенно независимым от распределения этих вероятностей, если только числа n, N, k достаточно велики. Второе замечание заключается в том, что явления вероятностного последействия в результате того же

расчета получают совершенно аналогичную формулировку; именно, мы получаем: можно ожидать с чрезвычайно большой вероятностью, что определенное чередование чисел частиц, например появление 3 после 2, будет наступать с относительной (во времени) частотой, которая по величине равняется соответственным образом вычисленной комбинаторной вероятности. Мы видим, что таким путем дилемма совершенно разрешена: хотя чередование чисел частиц во времени и не образует коллектива (не обнаруживает полной иррегулярности), тем не менее оно может быть рационально исследуемо логическими методами теории вероятностей.

Опытный ряд Сведберга

Проверка теории при помощи опытов возможна здесь только в известной мере, ограниченной самой природой предмета. Конечно, невозможно эксперементировать так долго, т. е. организовать столько опытных рядов, чтобы можно было рассчитывать получить хоть раз тот ужасающе невероятный результат, о котором мы говорили в связи с теорией газов. Напротив, следует ожидать, что данный не слишком короткий ряд наблюдений даст совпадение с тем, что согласно теории должно наступить с подавляющей вероятностью. Практически это означает, что временная частота, с которой наблюдается любое определенное число частиц, должна быть положена равной комбинаторной вероятности, вычисленной для этого числа. В этом, заметим между прочим, заключается также объяснение указанного выше факта, что опыты приводят к удовлетворительному результату и

без встряхивания эмульсии. Следующий пример исследования Броунова движения, произведенного шведским физиком Сведбергом, показывает нам, в какой мере расчет совпадает с наблюдением.

Сведберг наблюдал в определенном растворе золота частицы, появлявшиеся через промежутки в $^1/_{30}$ минуты в оптически изолированной части пространства. Он нашел среди 518 подсчетов:

Число частиц	0	112	раз,	относительная	частота	0,216
» »	1	168	»	»	»	0,325
» »	2	130	»	»	»	0,251
» »	3	69	»	»	»	0,133
» »	4	32	»	»	»	0,062
» »	5	5	»	»	»	0,010
» »	6	1	»	»	»	0,002
» »	7	1	»	»	»	0,002

Среднее значение числа частиц равно 1,54. Если отсюда по правилам исчисления вероятностей вычислить вероятности появления 0, 1, 2... до 7 частиц, то получатся следующие восемь величин: 0,212; 0,328; 0,253; 0,130; 0,050; 0,016; 0,004; 0,001, которые, как видно, очень хорошо совпадают с последним столбцом только что приведенной числовой таблицы. Согласно теории следовало ожидать с вероятностью, очень близкой к единице, что, например, число частиц 3 появится с относительной частотой, близкой к 0,130. Наблюдение, состоявшее из одного ряда опытов, дало в результате частоту 0,133.

Теперь интересно проследить на данном случае явление «последействия». Как только что было сказано, 168 раз наблюдалось число частиц 1. В четырех случаях непосредственно примыкающее наблюдение отсутствовало, так что мы должны считать только 164 еди-

ницы, могущих служить первым членом пары. Среди этих 164 случаев 40 раз появлялся нуль, 55 раз единица, 40 раз двойка, 17 раз тройка, и т. д. в качестве второго числа. Относительные частоты нуля, единицы, двойки и тройки равны 40:164 = 0,246, и соответственно далее 0,336; 0,246; 0,104 (если считать только те наблюдения, которые следуют непосредственно за 1). Если аналогичным образом вычислить частоты чисел от 0 до 3, принимая во внимание только числа, следующие за тройкой, то в результате получаются значения 0,087, 0,334, 0,319, 0,189. Мы видим, что нуль здесь встречается гораздо реже, тройка же гораздо чаще, чем в парах, начинающихся с единицы. «Иррегулярность», т. е. нечувствительность относительных частот по отношению к выбору нумеров, здесь отсутствует: ряд последовательно наблюдаемых чисел частиц не образует коллектива. Однако все же возможно, как я это только что выше проделал, применять и к этому случаю правила исчисления вероятностей, построенные на понятии коллектива. Для указанных коллективов, элементы которых суть пары наблюдений, можно рассчитать вероятности—я не вхожу в обсуждение способа вычисления—для пары 1—0 вероятность 0,246, для пары 3—0 вероятность 0,116 (наблюдения дали соответственно 0,246 и 0,087). Вероятность одного нуля прежде была найдена равной 0,212. Следует признать хорошим согласие между теорией и наблюдением, особенно принимая во внимание не очень большую длину ряда.

Радиоактивное излучение

Другое физическое явление, которое, подобно движению Броуна, представляет собою плодотворную

область применения теории вероятностей, есть радиоактивное излучение. И здесь мы не встречаемся, как в случае атомов и молекул теории газов, с гипотетическими, в смене времен и научных школ постоянно оспариваемыми представлениями. Дело здесь касается вещей, которые могут быть наблюдаемы с помощью сравнительно простых экспериментальных установок. «Распад» металла радиоактивной группы происходит таким образом, что тело испускает так называемые α-частицы — элементарные составные части атома с положительным электрическим зарядом, которые, падая на экран, состоящий из надлежащей субстанции, каждый раз производит вспышку, так называемую сцинтилляцию. Промежутки времени между двумя последовательными сцинтилляциями обнаруживают случайный характер. Можно очень просто изобразить имеющие здесь место обстоятельства, допуская, что для очень большого числа отдельных частей тела, которые спокойно можно назвать «атомами», в каждый момент, или, точнее говоря, в каждый очень короткий промежуток времени, имеет место альтернатива: распадение или не распадение.

Аналогичной задачей из области азартных игр была бы такая: через короткие, регулярные промежутки времени бросают кость и наблюдают число промежутков между двумя следующими друг за другом выпадениями шестерки. Из простой альтернативы 6 или не-6 в качестве исходного коллектива сперва выводится посредством k—кратного «связывания» другой коллектив, элементом которого является соединение k бросаний, а признаком — соединение k результатов (6 или не-6). Отсюда строится путем смешивания коллектив с теми же элементами и с двухмерным признаком: z = числу бро-

саний, предшествующих первой шестерке, и x = числу бросаний от первого до второго выпадения шестерки (так что между первой и второй шестеркой лежат $x-1$ не-шестерок и x промежутков времени). Случай, когда выпадает меньше чем 2 шестерки, мы можем, предполагая k очень большим, оставить без внимания. Вероятность наступления определенного z и определенного x вычисляется по известным нам правилам; если p есть вероятность выпадения шестерки, $q=1-p$ — вероятность выпадания не-шестерки, то она равна $q^z p.q^{x-1}p$. Если еще раз смешать, соединяя вместе все случаи с одним и тем же значением z, то мы получим вероятность того, что между первым и вторым выпадением шестерки находятся как раз x промежутков времени, в виде суммы $p^2 q^{x-1}(1+q+q^2+q^3+\ldots)$. Сумму эту, собственно, можно продолжать только до самого большого из возможных значений z, т. е. до $k-x$. Если мы, однако, возьмем k очень большим, то мы можем подставить вместо выражения, заключенного в скобки, бесконечный ряд $1+q+q^2+q^3+\ldots$, величина которого, как известно, есть $1:(1-q)=1:p$. Согласно этому вероятность отрезка времени x между первым и вторым выпадением шестерки равна pq^{x-1}, следовательно, для $x=1, 2, 3\ldots$ равна соответственно p, pq, pq^2, и т. д.

Руководствуясь прежними разъяснениями, мы можем отсюда вычислить математическое ожидание исследуемого отрезка времени, помножая каждую из этих вероятностей на соответствующее значение x и складывая полученные произведения. Таким образом мы получаем: $1.p+2.pq+3.pq^2+\ldots=p\ (1+2q+3q^2+\ldots)$, причем сумма, заключенная в скобки, как показывает алгебра, имеет значение $1:(1-q)^2=1:p^2$. Поэтому математическое

ожидание отрезка времени между первым и вторым выпадением шестерки равно $1:p$, следовательно, например, для «правильной» кости ($p=1/6$) равно 6. Если бы мы хотели вычислить промежуток между вторым и третьим, или между третьим и четвертым выпадением шестерки, то мы бы получали всякий раз то же самое число $1:p$. Поэтому мы можем сказать: отрезок времени, который в среднем можно ожидать между каким-либо выпадением шестерки и следующим за ним подобным же результатом, равен $1:p$ (в частном случае правильной кости—6) т а к и х промежутков времени, какие отделяют друг от друга два последовательных бросания кости.

Предсказывание промежутков времени

При попытке перенести это рассуждение на радиоактивное излучение прежде всего возникает то затруднение, что мы не знаем заранее ни величин p и q, ни длины промежутка времени между двумя последовательными «играми». Приходится также допустить этот промежуток времени так исчезающе малым, что доступная нам точность измерения времени не позволяет наблюдать столь незначительных временных различий. Тем не менее теория может быть проверена на опыте следующим образом. Сперва мы вычисляем вероятность того, что между двумя последовательными сцинтилляциями лежит не более трех элементов времени (т. е. один или два, или три). Согласно правилу сложения эта вероятность равна сумме

$$p+pq+pq^2=p\ (1+q+q^2)=p\frac{1-q^3}{1-q}=1-q^3.$$

Вероятность противоположного события, т. е. того, что пройдет больше трех элементов времени между

одной сцинтилляцией и следующей за нею другой, поэтому равна q^3 или $(1-p)^3$. Возьмем вместо числа 3 любое число n; тогда выражение $(1-p)^n$ даст нам вероятность того, что интервал между двумя соседними сцинтилляциями содержит больше чем n элементов времени. Но вот математический анализ учит нас, что если p есть очень маленькое, а n очень большое число, то вместо $(1-p)^n$ с достаточной точностью может быть подставлено выражение $(1:e)^{np}$, где e означает вполне определенное число, так называемое основание натуральных логарифмов, и равно 2,718 (обратная величина $1:e=0{,}3679$). Следовательно, np — я степень числа 0,3679 есть вероятность того, что между двумя событиями пройдет отрезок времени, содержащий больше чем n элементов. Это значение следующим образом можно сравнить с наблюдением.

После достаточно длительного срока наблюдений делят (измеренное в секундах) время между первой и последней сцинтилляцией на число временных интервалов и получают, таким образом, среднюю длину интервала, скажем, 5 секунд. Если теория верна и время наблюдения было достаточно велико, то этот промежуток времени в 5 секунд должен приблизительно совпадать с математическим ожиданием промежутка между двумя сцинтилляциями, которое, как прежде было установлено, содержит $1:p$ элементов времени. Таким образом один элемент времени составляет 5 p секунд, n элементов времени составляют 5 pn секунд, и интервалы, которые содержат больше чем n элементов времени, суть просто интервалы, длящиеся больше чем 5 np секунд. Если мы, например, положим $np=2$, то сюда относятся интервалы длины больше чем в 10 секунд,

при $np=3$ — те, длина которых больше 15 секунд, и т. д. Нужно, следовательно, только сосчитать числа действительно наблюденных интервалов, имевших больше чем 5, больше чем 10, больше чем 15 секунд длины, разделить эти числа на общее число наблюденных интервалов и полученные таким путем относительные частоты сравнить с вычисленными прежде вероятностями, а именно с первой, второй, третьей... степенью числа 0,3679. В общем виде можно сказать: если a есть полученная из наблюдений средняя длина промежутка между соседними сцинтилляциями (мы выше положили $a=5$ сек.), то теория требует, чтобы промежутки длины ca встречались с относительной частотою, равной c-ой степени дроби 0,3679.

Опытные ряды Марсдена и Барратта

Опытный ряд, о котором сообщают Марсден и Барратт, обнимал собою 7563 интервала между последовательными сцинтилляциями и в общем длился 14595 секунд. Средняя длина интервала поэтому была $a=1{,}930$.

В нижеследующей таблице в первую очередь указаны наблюденные числа интервалов, продолжительностью больше чем в 1, больше чем в 2..., больше чем в 9 секунд, и рядом с ними — эти же числа, деленные на 7563, т. е., следовательно, относительные частоты. Для сравнения тут же указаны вычисленные вероятности. Так как $1:a=0{,}518$, то сперва мы должны образовать 0,518-ю степень дроби 0,3679, что дает 0,596, затем квадрат этого числа, и т. д., до девятой степени. Вычисленные таким путем степени внесены в последний столбец приводимой таблицы.

Интервалы больше чем в	Число	Относительная частота	Вычисленная вероятность
0 секунд	7 563	1,000	1,000
1 »	4 457	0,590	0,596
2 »	2 694	0,356	0,355
3 »	1 579	0,209	0,211
4 »	921	0,122	0,126
5 »	532	0,070	0,075
6 »	326	0,043	0,045
7 »	196	0,026	0,027
8 »	110	0,015	0,016
9 »	68	0,009	0,009

Мы видим, что получается весьма хорошее согласие между двумя последними столбцами таблицы, т. е. между наблюденными и вычисленными согласно теории относительными частотами. Не скрою, что исследование надлежит еще продолжить в разных направлениях, чтобы уяснить себе положение вещей во всех подробностях, и что некоторые вопросы в этой области до сих пор еще не выяснены. Но для нас важна только принципиальная сторона дела, только общая форма выведенных на основе теории вероятностей положений о ходе физических процессов. Для уточнения сказанного до сих пор здесь нужно еще заметить следующее.

Наша теория, конечно, не приводить к тому выводу, что, если наблюдается 7 563 промежутка между сцинтилляциями в течение 14 595 секунд, то в точности 0,211 из них (т. е. $0{,}211 \cdot 7563 = 1596$) должны иметь длину больше чем в 3 секунды. Мы знаем только, что вероятность указанной величины интервала равна 0,211, и если мы приведем это в связь с выше подробно изложенным первым законом больших чисел, то из этого

следует: мы должны ожидать с вероятностью, очень близкой к 1, что приблизительно 21,1% всех 7563 интервалов будут обладать длиной, превышающей три секунды. Или, еще точнее: если очень часто повторять серию из 7563 наблюдений, то в подавляющем большинстве случаев должны появляться приблизительно 1596 интервалов, по своей длине превышающих 3 секунды. Это утверждение имеет точно такую же форму, как то, с которым мы познакомились в теории Броунова движения. Там говорилось: если мы повторим достаточно часто (длинный) ряд наблюдений для некоторого поля, то в подавляющем большинстве случаев относительная частота наступления определенного числа частиц будет равна наперед вычисленной.

Существенно в этом следующее: теория предсказывает не то, что произойдет в одном ряде опытов; она высказывает утверждение о том, что в подавляющем большинстве случаев будет происходить при очень большом числе повторений данного ряда опытов.

Новейшее развитие физики атома

Статистический метод в физике за последнее время получил расширение в двух направлениях. Первое ищет объяснения так называемого «вырождения» газа, т. е. тех отступлений от нормы в поведении газов, которые обнаруживаются при очень низких температурах. Со статистической точки зрения различные возникшие по этому поводу теории можно кратко охарактеризовать так: они состоят в том, что исходные вероятности, которые, как мы знаем, входят в качестве данных величин в каждую проблему исчисления вероятностей, под-

вергаются вариации. Пытаются найти такие допущения для исходных вероятностей, чтобы при средних и высоких температурах получалось согласие с более старой теорией Клаузиуса—Больцмана, а с приближением к нулю выходило соответствующее наблюдениям уменьшение удельной теплоты.

Обычно данные исходных распределений облекаются в такую форму, что известные области значений признаков или «пространства признаков» принимаются за «равновероятные». Принимая в различных теориях в качестве равновероятных различные области, т. е. различные группы признаков, мы производим вариирование исходных вероятностей. В более старых теориях принималось как «само собою понятное», что для отдельной молекулы каждое вообще возможное значение скорости одинаково вероятно в следующем смысле. Если представить себе, что в прямоугольной системе координат три компоненты скорости откладываются по направлениям осей, то в образованном таким путем «пространстве скоростей», которое вместе с тем есть «пространство признаков» для нашего исходного коллектива, равным объемам должны соответствовать равные вероятности. Каждый из этих объемов мы назовем «местом» для молекул. Если перейти к коллективу, элементом которого является наблюдение нескольких, скажем n, молекул, то теперь одинаково вероятно каждое возможное распределение этих n молекул по всем m местам пространства скоростей. Если мы, например, имеем только две молекулы A и B и три различных области скоростей a, b, c, то существует 9 (в общем случае m^n) различных индивидуальных распределений: сперва трояким образом можно искать места для A, а

именно либо *a*, либо *b*, либо *c*; затем снова выбирать для *B* любое из трех мест *a*, *b* или *c*. На каждое из этих 9 распределений приходится тогда вероятность $^1/_9$.

Новейшая теория, основанная индийским физиком Бозе и развитая дальше Эйнштейном, не рассматривает только что названные 9 распределений, как одинаково вероятные, а исходит из понятия «раскладки» [1]).

Раскладка дана тогда, когда известно, сколько молекул находится в каждом данном месте (пространства скоростей), не принимая во вниманио, какие это индивидуальные молекулы. В примере с 2 молекулами на 3 местах мы имеем только 6 возможных раскладок, а именно: либо обе молекулы вместе находятся в *a*, *b* или *c*, либо по одной в *a* и в *b*, соотв. в *a* и в *c*, соотв. в *b* и в *c*. Согласно теории Бозе—Эйнштейна каждый из этих случаев обладает равной вероятностью, следовательно $^1/_6$. По классической теории на каждую из трех названных нами в первую очередь возможностей приходилась бы вероятность $^1/_9$, а на каждую из остальных $^2/_9$, потому что эти последние содержат каждая по два различных индивидуальных распределения: в первой из них может быть *A* в *a*, *B* в *b* или, наоборот, *A* в *b* и *B* в *a*.

Наконец, в последние годы итальянский физик Ферми развил статистическую теорию газов, в которой допускается, что возможны и равновероятны только такие раскладки, у которых на каждом месте находится не более одной молекулы. В нашем примере, следовательно, на каждую из трех раскладок: 1) по одной молекуле в *a* и *b*, 2) в *a* и *c*, 3) в *b* и *c*, приходилась бы вероятность

---

[1]) «Aufteilung». (Примеч. перев.)

$^1/_3$. Проверка этого и других допущений происходит таким образом, что, согласно теории Больцмана, усматривают в вероятности каждого определенного состояния газа меру для его энтропии и требуют, чтобы зависимость энтропии от температуры и полной массы газа, входящих в величины m и n, получалась в согласии с наблюдением. В нашу задачу не входит углубляться здесь дальше в эти вопросы или тем более занимать критическую позицию по отношению к отдельным теориям. Повидимому, только дальнейшие экспериментальные исследования фактического поведения газа при низких температурах способны решить, может ли одна из до сих пор существующих теорий или вообще теория со столь простым исходным распределением правильно передать наблюдения.

Что касается вопросов, интересующих нас с точки зрения принципиальных основ исчисления вероятностей, то здесь следует только установить, что теория газов со всеми ее современными уклонами свободно укладывается в общие рамки, которые признаны нами определяющими для всех задач теории вероятностей. Распределения производных коллективов вычисляются на основании исходных распределений, предполагающихся данными; если, как это имеет место в теории газов, исходные данные не могут быть непосредственно проверены наблюдением, то с результатами эксперимента следует сравнивать вычисленные величины.

На второе направление современных тенденций в физической статистике я укажу совсем кратко. Оно связано с новейшим развитием теоретической физики. Известно, что де Бройль и Шредингер создали

теорию, согласно которой с каждым движением материальной частицы связан определенный волновой процесс. Прямолинейный путь предоставленной самой себе материальной частицы является только видимым представителем более сложного процесса, примерно так же, как прямолинейный световой луч, рассматриваемый с точки зрения волновой оптики. И вот снова, для того чтобы устранить некоторые противоречия новой теории, была выдвинута гипотеза, согласно которой волновое уравнение де Бройля и Шредингера определяет собою «вероятности» наступления известных атомных явлений. Однако в этой, представленной в Германи Борном, Гейзенбергом и Иорданом, концепции «волновой механики» все еще слишком неясно для того, чтобы можно было попытаться включить ее в рационально построенную теорию вероятностей.

Статистика и закон причинности

При обсуждении броунова движения и радиоактивного излучения я уже подробно охарактеризовал то, что в рамках физической концепции природы составляет разницу между статистической и чисто каузальной теорией. В то время как причинная теория притязает на возможность точного предсказания хода явления на основании начальных данных, статистическая теория занимается только утверждениями о том, что произойдет при достаточно часто повторенном опыте в подавляющем большинстве случаев. Для нашей цели нет надобности рассматривать другие, более сложные случаи физической статистики, а тем более подробно касаться новейшего развития атомной физики, касаться волновой механики с ее еще совер-

шенно невыясненным отношением к статистике. Нам будет целесообразнее, на основании вышеизложенных примеров применения понятия вероятности в физике, обратиться к последнему пункту, который нам еще осталось рассмотреть,—к нескольким кратким замечаниям о взаимоотношении между статистикой и так называемым законом причинности.

Правда, мы здесь не можем (да это было бы и крайне неуместно), коснуться всех вопросов и представлений, которые обычно связываются со словом «причина», со словом «каузальный». Этим путем мы пришли бы к широкому, почти безбрежному морю созерцаний в котором, правда, охотно плавают философы, которое, однако, не очень заманчиво для естествоиспытателя. Мы хотим и должны сосредоточить наше внимание только на живом в современном естествознании понятии «каузального объяснения» природных явлений. Мы можем не касаться истории его первоначального происхождения из донаучных идей, а прямо искать его возникновения там, где лежит начало всего «классического» естествознания: в однажды уже названном нами основоположном сочинении Ньютона «Philosophiae naturalis principia mathematica». Здесь, в механике материальных точек, был дан первый образец такого рода описания наблюдаемых явлений, какое обычно называется «каузальным объяснением» или просто «объяснением». К небольшому числу совсем кратких основных законов или аксиом было сведено исключительное обилие и многообразие явлений в том смысле, что все эти явления вытекали из тех аксиом в качестве логических следствий.

В чем же состояло то орудие, с помощью которого такая теория могла быть построена?

То обстоятельство, что Ньютон одновременно был и одним из основателей диференциального и интегрального исчисления, не является случайным. С основной идеей ньютоновой механики, да и с классической физикой вообще, неразрывно связано применение исчисления бесконечно малых для проведения дедукций, ведущих от аксиом к решению отдельных конкретных задач. Схема рассуждения всегда следующая: аксиомы или основные законы приводят к диференциальному уравнению, т. е. к соотношению между значениями физических переменных в пределах области, точно отграниченной в пространстве и во времени. Можно себе представить, что — например в механике — дается соотношение между скоростями и положениями тела в два непосредственно следующих друг за другом момента времени. Под «интеграцией» тогда подразумевают тот математический процесс, который из этого соотношения позволяет найти соотношение между положениями и скоростями в моменты времени, более отдаленные друг от друга. Но результат интеграции во всех случаях позволяет нам только, исходя из знания начального состояния, т. е. положения и скорости в один определенный момент времени, заключать к конечному состоянию, т. е. положению и скорости в некоторый позднейший момент времени. Для нашей потребности в причинном объяснении явлений уже это одно знаменует собою большое ограничение. Мы не узнаем, почему земля сегодня движется в определенном направлении, со скоростью 29,6 *км/сек*, на расстоянии около 23 400 земных радиусов от солнца,

если только мы не будем считать ответом на этот вопрос и каузальным объяснением фразу: потому что она за месяц перед тем имела такую-то скорость и такое-то расстояние от солнца.

Фактически является просто делом привычки, что мы усматриваем в результатах, к которым ведет механика Ньютона, каузальное обоснование явлений природы. Профан, который в первый раз услышит, что вся точная механика не дает ничего другого кроме предсказания, на основе первоначальных скоростей, скоростей позднейших моментов, назовет это скорее описанием, чем объяснением. Только специалисты были возмущены, когда они услышали от Кирхгофа в 1874 г. уже прежде защищавшийся Э. Махом тезис, согласно которому наша механика способна давать только (возможно простое) описание процессов движения.

Еще яснее становятся обстоятельства, если мы их рассмотрим в историческом разрезе. На примере Кеплера мы видим, какие вопросы ставились в связи с движением небесных тел. Из школьного преподавания известны найденные путем длинного ряда единичных наблюдений «три закона Кеплера», которые, как обычно говорят, получили единое объяснение в механике Ньютона. Однако при этом забывают или проглядывают, что Кеплер установил еще много других законов, которые нельзя привести ни в какую связь с механикой Ньютона. Так, он полагал, что полуоси орбит пяти больших планет должны относиться между собою, как грани пяти платоновых многогранников (тетраэдра, куба, октаэдра, и т. д.), вписанных в один и тот же шар. Дело здесь не в том, правильно ли фактически это

утверждение, или нет. Существенно здесь то, что Ньютонова механика не занимает и не может занимать никакой определенной позиции по вопросу о величине планетных орбит. В уравнения механики начальное положение планеты, т. е. ее положение в какой-нибудь определенный момент времени, выходит, как данная или предполагающаяся данной величина. Только решимость-интеллектуально пожертвовать тем, что во времена Кеплера являлось существенной задачей, может позволить нам видеть в механике Ньютона решение планетной проблемы; и все дальнейшее развитие ньютоновых идей, включая столь знаменитую в наше время теорию относительности, ничего не можем изменить в этом положении вещей.

Границы ньютоновой механики.

Нам возразят на это, что достижения механики не ограничиваются описанием современного движения созвездий, но позволяют делать известные выводы о происхождениии солнечной и планетной системы, и, следовательно все же соприкасаются с только что упомянутой проблемой Кеплера. На самом деле мы можем предположить в духе, например, теории Лапласа, что мир первоначально состоял из компактной жидкой массы, от которой затем отделились отдельные части в виде самостоятельных небесных тел. Мы могли бы, конечно, допустить, что весь этот процесс был подчинен ньютоновой механике. Из начальных состояний тогда должны были бы следовать конечные состояния, т. е. именно те данные, которые составляют исходный пункт ставших в наше время устойчивыми небесных движений. Однако здесь вступает в силу другое затруднение, и я

должен теперь обратиться еще ко второму, гораздо более существенному ограничению классической механики, которое я до сих пор только ради простоты временно оставлял без внимания.

В диференциальные уравнения механики и выведенные из них интегралы входят не только координаты и скорости тела, но также и другие величины, которые называют силами и которые должны быть известны по меньшей мере в своей зависимости от вышеупомянутых переменных, если мы хотим иметь возможность делать из уравнений выводы, подобные вышеописанным. Если мы говорим, что механика Ньютона объясняет или простейшим образом описывает движения небесных тел, то это происходит потому, что во все уравнения, получаемые для описания этих движений, входят силы одного единственного типа, один единственный силовой закон, как еще можно было бы выразиться.

Все астрономические явления (за одним единственным небольшим исключением) могут быть изображены совершенно удовлетворительно, если вместе с Ньютоном допустить, что между каждыми двумя телами по направлению линии их соединения действует сила притяжения, обратно пропорциональная квадрату расстояния между этими телами. Огромным шагом к упрощению нашего познания природы было данное Ньютоном доказательство того, что падение яблока с дерева и вращение луны вокруг земли могут быть описаны уравнениями, в которые входит одна и та же гипотеза о внешнем «силовом воздействии». При таких обстоятельствах мы охотно склоняемся к тому, чтобы рассматривать это описание как «каузальное объяснение», как сведение явлений к одной единственной «причине», а

именно к только что названной силе тяготения. Постепенно обнаружилось, что при последовательном проведении гипотезы о всеобщем тяготении находят себе объяснение почти все детали астрономических движений.

Однако, говоря о Ньютоновой механике, мы имеем в виду некое более обширное научное построение, чем одну только астрономическую теорию. Движения всех тел на земле правильно описываются данными Ньютоном диференциальными уравнениями, если только мы введем в них надлежащие силы или силовые законы. Классическая механика без всяких ограничений оправдывается, например, при исследовании явлений движения в паровой машине или локомотиве. Мы должны здесь только знать, какие силы развиваются в паровом цилиндре вследствие совершающихся в нем тепловых процессов.

Но рассмотрим теперь механическое явление, происходящее на доске Гальтона, по которой скатывается между гвоздями большое число одинаковых стальных шариков. Сперва кажется само собою разумеющимся, что все исходные положения Ньютона имеют силу и здесь. Однако что̀ мы здесь должны рассматривать в качестве действующих сил и ввести в наши уравнения? Если мы допустим, что действует одна только сила тяжести, то мы не получим деталей движения, т. е. того, что является для нас самым главным. Каждый раз, когда шар натыкается на гвоздь, наступает положение, в котором ничтожное силовое воздействие определяет собою, покатится ли шар дальше вправо или влево от гвоздя. Это воздействие может произойти вследствие движения воздуха, которое несомненно имеется в комнате в резутьтате неизбежных колебаний давления и

температуры. Следовательно, для того чтобы из Ньютоновой механики вывести заключение о ходе движения на доске Гальтона, нужно было бы знать в точности все происходящие воздушные течения. Но наша «потребность в причине» еще ни в какой мере не будет удовлетворена, если мы сделаем о движении воздуха такое допущение, из которого окажется возможным вывести фактически наблюдаемое движение шаров. Мы непременно пожелаем знать дальше, откуда происходит это воздушное течение, т. е. захотим и к нему применить классическую механику, вопрошая: какими силовыми законами управляется движение воздуха? Только если нам удастся в конечном счете вывести все из одного простого допущения, мы будем иметь чувство, что для данных явлений мы нашли каузальное объяснение.

Простота, как критерий каузальности.

Итак, при дальнейшем рассмотрении обнаруживается, что каузальное объяснение явлений природы обусловливается не существованием некоторой схемы классической механики (или классической физики вообще), т. е. некоторой системы диференциальных уравнений, подлежащих интегрированию при данных начальных условиях, но что к этому присоединяется еще некоторый критерий простоты тех допущений, на основе которых составлены эти уравнения. Очень поучительный пример для этого мы находим уже в теории движения планет. Здесь обнаружилось, что одна деталь, а именно медленное вращение того эллипса, по которому движется Меркурий, не может быть объяснена на основе простого допущения о взаимном тяготении наблюдаемых

масс. И вот, конечно, можно было допустить существование сил, вызывающих это отклонение, не затрагивая при этом уравнений механики; можно было бы даже рассматривать эти силы, как силы тяготения, если, например, представить себе, что где-нибудь вблизи солнца имеются распределенные подобно пыли и потому невидимые массы. Однако «потребность в причине» вряд ли удовлетворилась бы такой гипотезой. Когда впоследствии Эйнштейн показал, что измененным способом измерения времени и скоростей можно, не делая никаких новых допущений о действующих силах, воспроизвести перигельное движение Меркурия, то единогласное мнение всех разумных физиков склонилось к этой концепции, несмотря на то, что она требовала значительных интеллектуальных жертв в другом направлении. Для нашей проблемы каузального объяснения мы можем отсюда научиться только следующему: основные допущения классической физики, которые формально показывают нам все явления однозначно детерминированными, только тогда удовлетворяют нашу «потребность в причине», только тогда могут быть приняты за каузальное объяснение явлений природы, *когда удается обойтись достаточно простыми первоначальными допущениями*.

И вот эта-то первоначальная предпосылка простоты как раз в тех физических явлениях, к которым мы применяем исчисление вероятностей, не выполнена и не выполнима. Полнейшей иллюзией было бы мнение, что, например, движение шаров на Гальтоновой доске могут быть «каузально» объяснены при помощи дифференциальных уравнений механики, потому что эти уравнения по внешней форме однозначно определяют собою про-

цесс движения. Рассчитывая добиться какого-нибудь результата уточнением методов измерения, мы попадаем в еще менее надежный фарватер. Пытаясь проследить единичные явления, происходящие в воздухе или на поверхности твердого тела, более подробно под микроскопом, мы находим только одно: всюду встречаются процессы типа броунова движения. Вместо того, следовательно, чтобы притти к чему-нибудь (в смысле классической физики) более простому, мы приходим ко все более сложным и необозримым явлениям — говоря с точки зрения детерминистической концепции. В настоящее время известно, что все наши точные измерения, в частности, например простое измерение длины, встречают непреодолимую преграду для своей точности в наличности Броунова движения. Если еще принять во внимание, что вообще имеет мало физического смысла говорить о произвольно малых частицах, потому что тела, размеры которых меньше длины световой волны, не могут дать оптического образа и наверно не могут быть восприняты осязанием, то приходится притти к заключению, что обычные наглядные, даже суггестивные представления классической физики применимы не безгранично. И вот появляется — в лице исчисления вероятностей — теория, которая для совершенно определенных явлений — охарактеризованных нами как массовые — при помощи определенных логически безупречных рассуждений, из простых предпосылок (об исходных вероятностях) приводит к определенным заключениям о течении явлений. Утверждения этой статистической теории уже по форме отличаются от утверждений теории детерминистической — в первых говорится только о том, что происходит в большинстве случаев при достаточном

повторении опытов, — так что они не могут противоречить и даже не могут конкурировать с последними. Эмпирическая пригодность теории, согласие ее выводов с результатами наблюдения доказано многочисленными опытами во всех областях. Если за что и остается еще бороться статистической теории в настоящее время, то это только за свое право не одним интеллектом, но и интуицией быть признанной за правомерную интерпретацию явлений природы.

Отказ от причинной концепции

Вот уже несколько десятилетий мы, как я уже однажды имел случай высказать, переживаем эпоху, отмеченную исключительным расцветом теоретического естествознания, неслыханным расширением и перестройкой наших естественно-научных представлений о картине мироздания. Первым крупным событием этой научно-исторической эпохи было появление теории относительности Эйнштейна, которая встретила живейший отклик и за пределами физической семьи, в гораздо более широких кругах. Но все, что от нас требуется здесь в смысле отказа от старинных, так сказать, освященных веками представлений и мыслительных навыков, включая модификацию обычных понятий времени и пространства, кажется почти ничтожным в сравнении с теми потрясающими все основы новшествами, к которым пришли, отправляясь от кинетической теории газов, через теорию вероятностей и статистику, в теории квантов, в волновой механике. Оказывается, что неизбежно приходится сдать еще одну излюбленную позицию, имеющую свои корни в практической жизни, в донаучном мышлении, и вознесенную угодливыми философами на

недосягаемую высоту вечных логических категорий: наивное понятие причинности.

Я, как уже было сказано, не могу думать о том, чтобы останавливаться здесь на многосторонней и трудной проблеме причинности. Непосредственно ясно, что она тесно соприкасается с вопросами, группирующимися около основ исчисления вероятностей. Прежние эпохи, преимущественно направлявшие свой взгляд на целокупность явлений природы, видели в «случайности мироздания» — мы бы теперь сказали в наличности коллективов — доказательство бытия божия, которое, впрочем, в еще более старые времена обосновывалось обычно как раз детерминированностью явлений природы. Развитие затем шло в таком направлении, что наука сначала овладевала явлениями, которые могли быть выражены в детерминистической форме ньютоновой физики. Лишь постепенно в кругозор физиков вступили такие рассмотренные нами выше явления, как броуново движение, доска Гальтона и сцинтилляции радиоактивного излучения. Конечно, были сделаны попытки подчинить их привычным представлениям, по возможности без всяких модификаций; наука по самой своей сущности всегда стремится приспособлять свои методы и приемы к новым опытным фактам. С известным, психологически понятным упрямством и теперь еще сопротивляются против отказа от глубоко укоренившейся мыслительной традиции, связанной с так называемым законом причинности. Пройдет еще некоторое время, прежде чем начавшийся сейчас процесс приспособления закончится и точное естествознание оставит тот предрассудок, который теперь еще мешает ему видеть в статистическом методе полноценную, равноправную с другими ветвями физики

теорию ряда явлений. Когда этот конец наступит, тогда, я надеюсь, концепция учения о вероятностях, которую я вам здесь изложил, в полной мере обнаружит свою действенность. Тогда определенно выяснится, что она образует надежную основу для удовлетворительного описания обширного класса явлений природы и — чтобы вернуться к словам моего введения — что во многих областях человеческой деятельности и человеческой мысли можно, отправляясь от статистических данных и пользуясь научно очищенным понятием вероятности, достигнуть познания истины.

Теперь я хочу еще только, в качестве краткого заключительного слова, резюмировать в десяти тезисах основные идеи, составляющие сущность моей работы и представляющиеся мне принципиально новыми по сравнению с почти всеми прежними трактовками этого предмета.

Резюме

1. Положения теории вероятностей не могут быть правильно поняты, если слову «вероятность» придается значение, свойственное ему в обиходном языке; напротив, они имеют значение только для определенного, искусственно отграниченного рационального понятия вероятности.

2. О вероятности в рациональном смысле может итти речь только тогда, если в каждом отдельном случае точно описан коллектив, в пределах которого следует рассматривать эту вероятность; коллективом называется удовлетворяющее известным требованиям массовое или повторяющееся явление, вообще — последова-

тельность наблюдений, которую можно мыслить неограниченно продленной.

3. Вероятностью признака (результата опыта) в пределах данного коллектива называется предельное значение, к которому приближается относительная частота появления этого признака в последовательности наблюдений, при неограниченном продлении опытов; это предельное значение остается неизменным, если подвергнуть последовательность наблюдений произвольному выбору номеров: принцип иррегулярности или невозможности системы игры.

4. Задача теории вероятностей в тесном смысле состоит исключительно в том, чтобы из вероятностей, которые предполагаются данными в пределах известных «исходных коллективов», вычислять вероятности в пределах таких коллективов, которые из первых выведены. Имеющийся при этом в виду процесс вывода новых коллективов может быть всегда сведен к (иногда повторному) применению четырех простых основных операций.

5. В правильности значения вероятности в каком-нибудь конкретном случае — это может касаться как исходных данных какого-либо расчета, так и его результата — можно убедиться только путем статистического опыта, т. е. проведением достаточно длинного ряда наблюдений; не существует ни априорного познания вероятности, ни возможности при помощи другой науки, например механики, заключать о значениях вероятности.

6. То, что в классической теории рассматривается как определение вероятности, есть только попытка свести общий случай к частному случаю рав-

номерного распределения (при котором все признаки в пределах коллектива обладают одной и той же вероятностью); такая редукция часто невозможна, как, например, для вероятности смертного случая; часто она приводит к противоречиям, как, например, в проблеме Бертрана.

7. Так называемые «законы больших чисел» только тогда содержат осмысленные утверждения о ходе последовательности наблюдений, если с самого начала исходить из нашего определения вероятности; тогда эти законы устанавливают определенные, вытекающие из требования иррегулярности, свойства расположения результатов опыта; при пользовании же классическим «определением» законы больших чисел дают только чисто арифметические свойства определенных групп целых чисел.

8. Задача, которая выпадает на долю исчисления вероятностей в пределах так называемой математической статистики, состоит в том, чтобы исследовать, образует ли данный статистический материал некоторый коллектив, или каким образом он может быть сведен к коллективам с возможно более простым распределением.

9. Результаты статистической теории в физике существенным образом отличаются от результатов любой детерминистической теории. Они всегда содержат утверждения только о том, какое течение будет принимать опыт или длинный ряд опытов в подавляющем большинстве случаев при достаточно частом повторении; это большинство может быть столь подавляющим, что практически всякое различие исчезает.

10. То, что статистическая теория представляет собою некоторый «второсортный» или «только предваритель-

ный» способ объяснения явлений природы по сравнению с детерминистической, которая удовлетворяет нашей «потребности в причинности», есть предрассудок, который может быть понятен в порядке исторического развития естествознания, но который должен исчезнуть с ростом научной сознательности; ни в одном случае до сих пор не удалось хотя бы наметить подобный «прогресс» от статистической концепции какого-либо явления к каузальной.

ПРИМЕЧАНИЯ И ДОБАВЛЕНИЯ.

Совсем краткое, популярное изложение основных мыслей этой книги можно найти в первой части моей работы: «M a r-b e s «Gleichförmigkeit in der Welt» und die Wahrscheinlichkeitsrechnung», Die Naturwissenschaften (J. Springer, Berlin) 7. Jahrg., 1919, H. 11, 12, 13, S. 168 по 175, 186 по 195, 205 по 209. — Математическое обоснование я дал в первый раз в работе «Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung», Math. Zeitschr., Bd 5, 1919, 52 до 99. Она передана вкратце в L. G. D u P a s q u i e r, Le calcul des probabilités, Paris (I. Hermann), 1926, гл. VIII. Подробное, имеющее характер руководства, изложение, содержащее по сравнению с первыми работами и некоторые предметные изменения, появится в конце 1928 г. в качестве первого тома моих «Vorlesungen über angewandte Mathematik» под названием: «Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik, Fehlertheorie und in der theoretischen Physik». — Из настоящей книги часть главы о первом законе больших чисел (стр. 103 по 121) напечатана почти в том же контексте под заглавием «Das Gesetz der grossen Zahlen und die Häufigkeitstheorie der Wahrscheinlichkeit» в Naturwissenschaften, 15 Jahrg., 1927, H. 24, S. 497 по 502.

К стр. 2 строка 7: G e o r g C h r. L i c h t e n b e r g, Vermischte Schriften, erster Teil, II, I. (Новое издание Göttingen, 1853. S. 79.)

Слово и понятие

К стр. 3 строка 15: «Deutsches Wörterbuch» von J. und W. G r i m m, Bd 13, Leipzig, 1922, S. 994.

К стр. 4 строка 5: R. Eisler, Wörterbuch der philosophichen Begriffe, 3. Aufl., Berlin, 1910, S. 1743 (dritter Band).

К стр. 5 строка 12: W. Sombart, Der proletarische Sozialismus, 10. Aufl., Jena, 1924, Bd 1, S. 4.

К стр. 6 строка 5: I. Kant, Kritik der reinen Vernunft, Methodenlehre, 1. Hauptstück, 1. Abschn., 2. Aufl., 1787, S. 758. С изложенным тут учением об определениях мои рассуждения не совпадают.

К стр. 7 строка 13: О понятии механической работы и об образовании понятий в точных науках вообще читатель (также и не математик) получит основательнейшие разъяснения в: E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung historich-kritisch dargestellt (1883), 7. Aufl., Leipzig, 1921; еще точнее в работе того же автора: «Prinzipien der Wärmelere, historisch-kritisch dargestellt» (1896), 4. Aufl., Leipzig, 1923, S. 406 по 432. [Отделы: Die Sprache, Der Begriff, Der Substanzbegriff.) Точке зрения Маха во всем существенном следует концепция текста.

К стр. 9 строка 5: О споре относительно «истинной меры силы» ср., например, Mach, Mechanik, l. c., S. 247 и 288. Спор, начатый Лейбницем, длился 57 лет и закончился только в 1743 г. с появлением «Traité de dynamique» Даламбера.

Определение вероятности

К стр. 12 строка 14: Сочинение Гёте (Werke, 12°, Bd 38, 1830, S. 142 по 151), употребляющее слово вероятность в смысле иллюзии, обнаруживает гораздо более тонкий филологический вкус, чем приведенные выше формулировки философов.

К стр. 12 строка 19: А. А. Марков говорит в своем учебнике исчисления вероятностей (четвертое издание, Госиздат, Москва, 1924, стр. 320): «и мы никак не можем согласиться с Буняковским, что необходимо выделить известный класс рассказов, сомневаться в которых он считает предосудительным».

К стр. 12 строка 23: Лаплас, 1749 по 1827, обнародовал в 1814 г. свой «Essai philosophique des probabilités», который потом послужил введением к позднейшему изданию его главного произведения «Théorie analytique des probabi-

lités» (1-е издание 1812, 2-е издание 1814, 3-е издание 1820). Этот «essai», который принимает точку зрения неограниченного детерминизма, есть характерное выражение философских воззрений Франции XVIII века. Портативное новое издание выходит в собрании «Les maîtres de la penseé scientifique», 1921; немецкие переводы F. W. Tönnies'a, Heidelberg, 1819 и N. Schwaiger'a, Leipzig, 1886.

К стр. 13 строка 1: S. D. Poisson, 1781 по 1840, обнародовал в 1837 г. под названием «Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile» учебник теории вероятности вполне математического характера, который только в пятой главе рассматривает указанную в заглавии проблему, в остальном же является одной из самых значительных книг в истории развития математических теорий; немецкое издание: «Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren wichtigsten Anwendungen», bearbeitet non Schnuse, Braunschweig, 1841.

К стр. 15 строка 1: (Новый) термин «коллектив» примыкает к введенному Фехнером для сходного понятия термину «Kollektivgegenstand» («коллективный предмет»).

К стр. 18 строка 4: Математическое определение предельного значения может быть формулировано примерно так. О неограниченном ряде последовательно занумерованных чисел, которые все лежат между 0 и 1, говорят, что он стремится к определенному предельному значению, когда имеет место следующее: как бы велико ни было число k, первые k десятичных знаков для всех чисел нашего ряда, начиная с некоторого определенного номера, должны быть одни и те же.

К стр. 23, строка 1: «Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungsgesellschaften», Berlin, 1883. Краткие указания об этих и других таблицах можно найти у E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2. Bd 3. Aufl., Leipzig und Berlin, 1921, S. 140 ff.

К стр. 27, строка 8: Учебник Пуассона был указан выше (к стр. 13), точно так же как и учебник Лапласа. Остальные сочинения: John Venn, The logic of chance, London and Cambridge, 1866; Th. Fechner, Kollektivmasslehre, herausgegeben von von G. F. Lipps, Leipzig, 1897; H. Bruns,

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre, 1906. G. H o l m, Die Wahrscheinlichkeitslehre als Theorie der Kollektivbegriffe in Annalen der Naturphilosophie, Bd 1, 1802, S. 364 по 381.

Элементы исчисления вероятностей

К стр. 38 строка 27: В реферате C z u b e r'a в «Enzyklop. d. mathemat. Wissenschaften», Bd 1 (2. Teilband), S. 736 о концепции субъективистов написано: «Согласно первому (т. е. принципу отсутствующего основания) констатирование равновозможностей опирается на а б с о л ю т н о е н е з н а н и е об условиях существования или осуществления единичных случаев».

К стр. 46 строка 24: Математически сведущий читатель поймет, что плотность вероятности есть производная вероятности по переменному, определяющему собою величину признака. Если мы через x обозначим числовое значение, которое, напр., может принимать физическая величина, и через $w(x)$ плотность вероятности, то $w(x)\,dx$ означает вероятность того, что результат измерения окажется заключенным в интервале от x до $x+dx$. Плотность при этом должна удовлетворять условию

$$\int_0^1 w(x)\,dx = 1.$$

К стр. 56 строка 25: Правило смешивания для случая непрерывного распределения гласит: вероятность того, что величина, обладающая плотностью вероятности $w(x)$ окажется заключенной в интервале от $x=a$ до $x=b$, равна $\int_a^b w(x)\,dx$.

К стр. 63 строка 12: Знаменитая работа Б е й е с а издана только после смерти автора П р а й с о м под заглавием «An essay toward solving, a problem in the doctrine of chances», London, Philosoph. Transactions, 53 (1763), стр. 376 по 398 и 54 (1764), стр. 298 по 310. Немецкий перевод появился в «Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften», № 169, Leipzig, 1908.

К стр. 72 строка 23: Понятие «связуемости» двух коллективов не встречается ни в одной из моих работ, напечатанных до сих пор. Подробное его определение будет дано в «Vorlesungen», о выходе которых я сообщил выше.

К стр. 76 строка 18: John Maynard Keynes, Treatise on probability, London, 1921, немецкий перевод F. M. Urban'a под заглавием «Über Wahrscheinlichkeit», Leipzig, 1926. Главным образом гл. VIII (§§ 73 по 90 немецкого издания) направлена против теории частот.

К стр. 80 строка 8: Ed. von Hartmann, Philosophie des Unbewussten, 11. Aufl., Leipzig, 1904, 1. Bd, S. 36 по 47. Того же автора, «Die Grundlagen des Wahrscheinlichkeitsurteils», в Vierteljahrschr. f. wiss. Philos. und Soziologie, Bd 28, 1904, S. 281. Для критики понятия вероятности у Гартмана ср. также первое из указанных сочинений, S. 445 по 452.

К стр. 80 строка 29: H. Poincaré, Calcul des probabilités, 1 éd., Paris, 1912, p. 24. Обзор литературы по основам исчисления вероятностей (приблизительно до 1916 г.) дает книга E. Czuber'a, Die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig und Berlin, 1923. Из весьма многочисленных отдельных работ в различных отношениях стоит близко к моей концепции: H. E. Timerding, Die Analyse des Zufalls, Braunschweig, 1915.

К стр. 82 строка 15: A. Meinong, Über Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit, Beiträge zur Gegenstands- und Erkenntnisstheorie, Leipzig, 1915, 760 стр. 8°.

К стр. 94 строка 27: J. M. Keynes, l. c., немецкое издание, S. 29 ff. Главный представитель субъективистов C. Stumpf, Über den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Stzgbr. d. Bayr. Akad., 1892, S. 41. Здесь находится следующее подробное обоснование роли незнания: «одинаково возможны случаи, в отношении к которым мы находимся в равной неосведомленности, и так как неосведомленность только тогда может быть сравниваема по своей мере, когда мы абсолютно ничего не знаем о том, какой из различных возможных случаев должен наступить, то мы тем самым можем сделать нашу формулировку еще более определенной.

К стр. 96 строка 26: I. v. Kries, Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, eine logische Untersuchung (1886), 2. Abdruck, Tübingen, 1927. Приведенная формулировка, S. 157.

К стр. 98 строка 2: О парадоксе Бертрана сообщают почти все известные учебники исчисления вероятностей, например E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Bd 1, 3. Aufl., Leipzig und Berlin, 1914, S. 116 ff.

Законы больших чисел

К стр. 103 строка 21: Сочинение Пуассона выше было приведено (к стр. 13 строка 1)—J. Bernoulli, Ars conjectandi, Basel, 1713; немецкое издание R. Haussner'a в Ostwalds Klassiker d. exakten Wissenschaften, № 107 и 108, Leipzig, 1899. Закон, имеющийся здесь в виду, находится в 4-й части, гл. V, стр 236. (Немецкое издание, 2. Bd, S. 104.) Цитата из предисловия Пуассона переведена с оригинала, стр. 7.

К стр. 106 строка 2: Общая теорема Чебышева опубликована в 1867 г. на русском языке, и затем в Journ. de Lionville, sér. II, t. 12, 1867. Доказательство теоремы совсем элементарно.

К стр. 111 строка 8: Deus ex machina совсем неприкрашено вводит, например, H. Weyl, Philosophie der Mathem. u. Naturwissensch. (Отд. отт. из «Handb. d. Philos.»), München und Berlin, 1927, S. 151.

К стр. 113 строка 7: По поводу математических вопросов, примыкающих к опровергающему примеру, стр. G. Pólya и G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze a. d. Analysis, Bd 1, Berlin, 1925, S. 72 и 238. Здесь объясняется также интересующее нас поведение логарифмических таблиц.

К стр. 117 строка 9: G. Pólya, Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, 1921: «Все авторы, определяющие вероятность как предельное значение частоты, предполагают до известной степени . . . не только существование закона Бернулли . . .»; H. Weyl, l. c., S. 152; E. Slutsky, Über stochastische Asymptoten und Grenzwerte, Metron 5, 1925.

К стр. 121 строка 16: Оригинальная работа Бейеса была приведена выше (к стр. 63 строка 12). «Теоремы Бейеса» в ней нет. Наименование оправдывается только тем, что здесь дело касается решения проблемы, поставленной Бейесом. И наименование, и решение принадлежат Лапласу.

К стр. 136 строка 1: Karl Marbe, Die Gleichförmigkeit in der Welt, München 1916; Mathematische Bemerkungen zu meinem Buch «Die Gleichförmigkeit in der Welt», там же 1916.— Ср. мою приведенную в начале этих примечаний работу в Naturwissenschaften 1919, а также по поводу математического решения проблемы мою работу «Zur Theorie der Iterationen», Ztschr. f. ang. Math. und Mech., 1, 1921, S. 298—307. Здесь показывается, что вероятность x-кратного наступления длинной итерации при n единичных наблюдениях вычисляется по формуле

$$w = \frac{e^{-a} a^x}{x!},$$

где $a = n\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$, а m означает длину итерации.

К стр. 140 строка 24: O. Sterzinger, Zur Logik und Naturphilosophie der Wahrscheinlichkeitslehre, Leipzig, 1911. Paul Kammerer, Das Gesetz der Serie, Stuttgart u. Berlin, 1919.

К стр. 143 строка 19: F. Eggenberger und G. Pólya, Zeitschr. f. angew. Mathem. und. Mech.., Bd 3 (1923), S. 279 по 289.

К стр. 147 строка 29: W. Lexis, Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft, Freiburg in B., 1877.

К стр. 154 строка 1: Числа взяты из «Österreichische Statistik», Bd 88, 1911, Heft 3, S. 20 и 120.

К стр. 155 строка 23: Упомянутая алгебраическая теорема есть так называемое неравенство Шварца: если $p_1, p_2, \ldots p_z$ — отдельные вероятности, а p — их среднее значение, то $p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2) + \cdots + p_z(1-p_z) \leqq z \cdot p(1-p)$.

К стр. 156 строка 15. Числа взяты из «Statistisches Jahrbuch für das Deutsche Reich», Bd 43, 1923, S. 35.

К стр. 159 строка 1: По поводу теории «существенных компонент колебания» и данных статистики самоубийств ср. L. v. Bortkiewicz, Homogeneität und Stabilität in der Statistik, Skand. Actuarietidskrift, 1918, Heft 1/2. Добавочный член к формуле стр. 155 (если $p_1, p_2, \cdots, p_n$ — отдельные вероятности, а p — их среднее значение) имеет вид

$$\frac{(p_1-p)^2 + (p_2-p)^2 + \cdots + (p_n-p)^2}{n}.$$

К стр. 164 строка 22: Ad. Quetelet, Physique sociale ou essai sur le développement des facultés de l'homme, Brüssel—Paris — St.-Pétersburg, 1869. Немецкое издание V. Dorn, Jena, 1914.

К стр. 165 строка 12: Основные работы Менделя (1866 и 1870) были перепечатаны Tschermak'ом под заглавием «Versuche über Pflanzenhybriden» в Ostw. Klass. d. exakten. Wissensch., № 130, 4. Aufl., Leipzig, 1923. По поводу числовых примеров ср. E. Czuber, Statistische Vorschungsmethoden, Wien, 1921, S. 184.

К стр. 166 строка 26: О важнейших вопросах статистики в технике ср., например, G. Rückle u. F. Lubberger, Der Fernsprechverkehr als Massenerscheinung mit starken Schwankungen, Berlin, 1924; R. Becker, H. Plaut u. I. Runge, Anwendungen der mathematischen Statistik auf Probleme der Massenfabrikation, Berlin, 1927.

К стр. 168 строка 1: Приведенное рассуждение находится в книге, которая в остальном очень остроумна, а именно книге E. Bleuler'a, Das autistisch-undisziplinierte Denken in der Medizin etc., Berlin, 1921, S. 132 по 145. Позиция математика по этому вопросу, см. у Pólya, S. 145 по 148.

К стр. 173 строка 10: Относительно употребительных статистических характеристик лучше всего см. у E. Czuber, Die statistischen Forschungsmethoden, Wien, 1921, особенно S. 57—108. Не математик может посмотреть также у F. Zizek, Die statistischen Mittelwerte, Leipzig, 1908.

К стр. 173 строка 15: Типы распределения Пирсона изложены у W. Palin Elderton, Frequency curves and correlation, London (1906).

К стр. 173 строка 23: H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre, Leipzig u. Berlin, 1906; C. V. L. Charlier, Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik, Lund (1920). Рациональный метод описания, о котором идет речь в тексте, есть разложение функции распределения в бесконечный ряд, коэфициенты которого дают статистические характеристики. Разложение Брунса исходит из функции Гаусса e^{-x^2}, а разложение Шарльe — из функции Пуассона $\frac{a^x e^{-a}}{x!}$. Последующие члены разложения суть про-

изводные и соответственно разностные отношения первых. Математическая теория ряда Брунса находится в моей работе в «Jahresber. d. deutsch. Mathem. Vereinigung», 21 (1912), S. 9 по 20, а теория ряда Шарлье—в работе H. Pollaczek—Geiringer в «Skand. Aktuarietidskr», 1928, S. 98 по 111. Ср. также работу последнего автора: «Die Statistik seltener Ereignisse» в Die Naturwissensch., 16, 1928.

К стр. 175 строка 30: Основные работы Гаусса (1821 и 1826) появились под заглавием «Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate» v. C. F. Gauss в немецком издании Börsch'a и Simon'a, Berlin, 1887.

К стр. 180 строка 1: Приведенная здесь теорема Лапласа была предметом многочисленных математических исследований Ср., между прочим, мою работу: «Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung», Math. Zeitschr, Bd 4, 1919, S. 1 по 96.

К стр. 183 строка 1: Работы школы Пирсона можно найти в журнале, выходящем с 1902 года: «Biometrica, a journal for the study of biological problems». Главной работой Пирсона является: «Grammar of science», London, 1900.

Проблемы физической статистики

К стр. 184 строка 8: По поводу теории Больцман ср. L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie, 2 тома, Abdr., Leipzig, 1910.

К стр. 184 строка 30: M. v. Smoluchowski, Über den Begriff des Zufalls und den Ursprung der Wahrscheinlichkeitsgesetze in der Physik, Die Naturwissenschaften, 6, 1921, S. 253 по 263 (Planckheft).

К стр. 186 строка 10: «Демон» Лапласа встречается в уже приведенном к стр. 12 строка 23: «Essai philosophique».

К стр. 193 строка 15: Работа Смолуховского приведена выше, к стр. 184 строка 30.

К стр. 194 строка 27: Легко доступное введение в старую атомную теорию, с приведением многих числовых данных, дает книга: J. Perrin, Die Atome, deutsch. v. A. Lottermoser, 2. Aufl., Dresden u. Leipzig, 1920.

К стр. 202 строка 14: Ernst Mach, Die Leitgedanken meiner naturwissenschaftlichen Erkenntnisslehre und ihre Aufnahme

durch die Zeitgenossen, Leipzig, 1919, S. 9; ср. также «Wärmelehre», 4. Aufl., S. 364.

К стр. 208 строка 19: Основные работы М. Смолуховского находятся в «Sitzungsber. der Wiener Akad., math.-naturwiss. Kl.» Abt. IIa, Bd 123 (1914), S. 2381—2405 и Bd 124 (1915), S. 339—368.

К стр. 212 строка 14: Опыты Сведберга описаны в: Svedberg, Existenz der Moleküle, Leipzig, 1912, S. 148 ff. Ср. также E. Fürth, Schwankungserscheinungen in der Physik, Braunschweig 1920. Разъяснение принципиальных вопросов в отношении временного течения и т. д. я дал в работе: «Ausschaltung der Ergodenhypothese in der physikalischen Statistik», Physikal. Zeitschr., 21, 1920, S. 225 по 232 и 256 по 262.

К стр. 214 строка 30: L. v. Bortkiewicz, Die radioactive Strahlung als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen, Berlin, 1913; E. Marsden a. T. Barratt, Proceedings of the Physical Society of London, XXIII, 1911, S. 367 по 373.

К стр. 221 строка 21: Краткое изложение новейшего развития атомной физики, а именно как новейшей теории газов Бозе—Эйнштейна и Ферми, так и волновой механики де Бройля и Шрёдингера, а также и концепций Борна, Гейзенберга и Иордана можно найти у A. Haas, Materiewellen und Quantenmechanik, Leipzig 1928.

К стр. 227 строка 1: К проблеме каузального объяснения ср. также мою лекцию: «Über die gegenwärtige Krise der Mechanik, Zeitschr. f. angew. Mathematik und Mechanik», 1, 1921, S. 425 по 431, или «Die Naturwissenschaften» 10, 1922, S. 25 по 29.

К стр. 235 строка 10: Моя лекция «Naturwissenschaft und Technik der Gegenwart», Leipzig u. Berlin, 1922, см. также «Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure», 64, 1920, S. 687 по 630 и 717 по 719.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА—ЛЕНИНГРАД

А. БОУЛИ

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

Часть первая

ОБЩИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ

Перевод с английского под редакцией проф. **М. Н. Смит.**
Стр. X + 299. **Ц. 3 р.**

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА:

Книга в целом должна послужить общим введением в теорию и практику статистики для всех, кому приходится иметь с ней дело или для кого важно получить общее представление о значении статистических итогов и сводок и о границах применения статистического метода. Но ни в коей мере целью книги не является дать компендиум фактов, и приведенные в ней таблицы служат лишь для иллюстрации метода; нет в ней и подробных сведений о приведенных статистических данных. Мы однако надеемся, что с ее помощью читатель будет в состоянии понять и, главное, оценить и критически отнестись к публикуемым официально и не официально таблицам и сводкам, касающимся любого из тех многочисленных объектов, при изучении которых существенно важно разбираться в цифрах и в их отношении к фактам...

Мы надеемся, что 1-ая часть охватывает надлежащим образом значительную часть методов и технических приемов, необходимых для обычной статистической работы, насколько она возможна без применения математики, за исключением лишь самой элементарной.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА—ЛЕНИНГРАД

СЕРИЯ „НОВЕЙШИЕ ТЕЧЕНИЯ НАУЧНОЙ МЫСЛИ“

С. Н. РЖЕВКИН

СЛУХ И РЕЧЬ В СВЕТЕ СОВРЕМЕННЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Стр. 145. Ц. 1 р. 35 к.

В. ПАУЛИ

БЕЛКИ И КОЛЛОИДЫ

Перев. с нем. В. А. Энгельгардта.

Стр. 66. Ц. в папке 75 к.

Н. К. КОЛЬЦОВ

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МОРФОЛОГИИ

Стр. 58. Ц. в папке 75 к.

А. В. ГИЛЛ

РАБОТА МЫШЦ

Стр. 136. Ц. в папке 1 р. 15 к.

К. ФУНК

ВИТАМИНЫ

История и практическое значение их открытия.

Стр. 96. Ц. в папке 75 к.

ПРОДАЖА ВО ВСЕХ ОТДЕЛЕНИЯХ И МАГАЗИНАХ ГОСИЗДАТА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА—ЛЕНИНГРАД

СЕРИЯ „НОВЕЙШИЕ ТЕЧЕНИЯ НАУЧНОЙ МЫСЛИ“

А. Я. ХИНЧИН

ВЕЛИКАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА

Стр. 76. Ц. 65 к.

С. И. ВАВИЛОВ, проф.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Стр. 168 + 1 портрет. Ц. 1 р. 50 к., в папке 1 р. 65 к.

Н. Н. СЕМЕНОВ

СОВРЕМЕННОЕ УЧЕНИЕ О СКОРОСТЯХ ГАЗОВЫХ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

Стр. 127. Ц. в папке 1 р. 28 к.

В. В. МЫСОВСКИЙ

КОСМИЧЕСКИЕ ЛУЧИ

Стр. 131. Ц. в папке 1 р. 65 к.

П. П. ЛАЗАРЕВ

УСПЕХИ ГЕОФИЗИКИ

Стр. 82. Ц. 85 к., в папке 1 р.

ПРОДАЖА ВО ВСЕХ ОТДЕЛЕНИЯХ И МАГАЗИНАХ ГОСИЗДАТА

«КНИГА—ПОЧТОЙ» ГОСИЗДАТА

МОСКВА, 64

ВЫСЫЛАЕТ НАЛОЖЕННЫМ ПЛАТЕЖОМ ЛЮБУЮ КНИГУ, ИМЕЮЩУЮСЯ НА КНИЖНОМ РЫНКЕ

ПРИ ВЫСЫЛКЕ ВПЕРЕД ВСЕЙ СТОИМОСТИ ЗАКАЗА ПЕРЕСЫЛКА БЕСПЛАТНО

ПРИ ВЫСЫЛКЕ ДЕНЕГ ПОЧТОЙ РЕКОМЕНДУЕТСЯ ПИСЬМО-ЗАКАЗ ПОДШИВАТЬ К ПОЧТ. ПЕРЕВОДУ

«КНИГА—ПОЧТОЙ» ИНФОРМИРУЕТ О ВЫХОДЯЩИХ НОВИНКАХ ГОСИЗДАТА ПО ВСЕМ ВОПРОСАМ ЗНАНИЯ

СООБЩИТЕ ВАШ ТОЧНЫЙ АДРЕС, ВАШУ ПРОФЕССИЮ И ПО КАКИМ ВОПРОСАМ ВЫ ЖЕЛАЕТЕ ПОЛУЧАТЬ ИЗВЕЩЕНИЯ О ВЫХОДЯЩИХ НОВИНКАХ

«КНИГА—ПОЧТОЙ»
ГОСИЗДАТА
ВЫСЫЛАЕТ
УДЕШЕВЛЕННЫЕ
БИБЛИОТЕЧКИ

Каталоги и проспекты на удешевленные библиотечки высылаются БЕСПЛАТНО

ЗАКАЗЫ НА ВСЕ НУЖНЫЕ ВАМ КНИГИ АДРЕСУЙТЕ:

МОСКВА, 64

«КНИГА — ПОЧТОЙ» ГОСИЗДАТА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ГОД ИЗДАНИЯ 60-Й

Ответственный редактор Д. Ф. ЕГОРОВ

ЖУРНАЛ ИЗДАЕТСЯ ПРИ РЕДАКЦИОННОМ УЧАСТИИ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Д. Ф. ЕГОРОВ, В. А. КОСТИЦЫН, Н. Н. ЛУЗИН, И. И. ПРИВАЛОВ

В журнале помещаются статьи, самостоятельные научные труды по математике и смежным дисциплинам на русском, английском, немецком, французском, итальянском языках, причем статьи на русском языке сопровождаются резюме на одном из иностранных языков, а статьи на иностранных языках — резюме на русском языке.

Журнал рассчитан на научных работников-специалистов по математике и смежным дисциплинам, вообще на лиц с высшим математическим образованием.

В 1930 году будет несколько увеличено число статей иностранных ученых.

ОТДЕЛЫ ЖУРНАЛА

1. Оригинальные научные работы.
2. Краткие сообщения о научных работах.

ПОДПИСНАЯ ЦЕНА:

На год . . . . . 12 руб.,
на 6 мес. . . . . 6 руб.

ВЫХОДИТ 4 КНИГИ В ГОД ПО МЕРЕ НАКОПЛЕНИЯ МАТЕРИАЛА

КАЖДЫЙ УЧЕНЫЙ ДОЛЖЕН ВЫПИСЫВАТЬ ПОМИМО СВОЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ЖУРНАЛА ЖУРНАЛ

НАУЧНОЕ СЛОВО

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ОРГАН НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Отв. редактор проф. О. Ю. ШМИДТ

В ГОД 10 НОМЕРОВ ГОД ИЗДАНИЯ 3-й

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Точные науки—акад. А. Ф. ИОФФЕ, проф. В. Ф. КАГАН и прив.-доц. Э. В. ШПОЛЬСКИЙ. Биология — проф. Н. К. КОЛЬЦОВ. Медицина — проф. А. И. АБРИКОСОВ. Обществоведение — Н. И. БУХАРИН, В. П. МИЛЮТИН, акад. С. Ф. ОЛЬДЕНБУРГ, проф. И. К. ЛУППОЛ. Техника — Г. М. КРЖИЖАНОВСКИЙ и проф. М. Я. ЛАПИРОВ-СКОБЛО. Организация и гигиена умственного труда — прив.-доц. К. Х. КЕКЧЕЕВ.

В каждом номере журнала дается несколько больших статей крупнейших советских и иностранных специалистов, посвященных актуальным проблемам современной науки и техники. Кроме того, в отделе «Из жизни науки» даются краткие рефераты наиболее интересных статей советской и иностранной периодики и помещается подробная хроника научной жизни всех культурных стран.

«Научное слово» систематически освещает деятельность крупнейших научных учреждений СССР (Академия наук, Коммунистическая академия, Институты НКЗдрава, НТУ ВСНХ и т. д.).

Журнал посвящен вопросам естествознания (точные науки, биология), медицины, техники, обществоведения, организации и гигиены умственного труда.

Журнал рассчитан на **подготовленного** читателя (врача, инженера, педагога, агронома, научного работника, студента, советского, партийного и профсоюзного работника). Редакция руководствуется положением: «Наука есть основа социалистического строительства» и поэтому журнал, освещающий на своих страницах важнейшие и актуальные проблемы современной науки, помогает своим читателям в их практической повседневной работе.

ПОДПИСНАЯ ЦЕНА:

На год . . . . . 8 руб.,
на 6 мес. . . . . 4 руб.
ЦЕНА ОТДЕЛЬНОГО НОМЕРА—1 Р.

ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ: Периодсектором Госиздата РСФСР, Москва, центр, Ильинка, 3, в отделениях, конторах и магазинах Госиздата, у уполномоч., снабж. удостоверениями, во всех киосках Всесоюзного контрагентства печати, во всех почт.-тел. конторах, а также у письмоносцев. По гор. МОСКВЕ подписку надлежит направлять: Московский обл. отд. Госиздата «МОСКОВСКИЙ РАБОЧИЙ» Москва, Неглинный, 9.